Διασκεδαστικοί Γράφοι. Μια Διδακτική Πρόταση για Μαθητές Λυκείου

Κ. Γκόλφης[1], Ε. Ρόμπολα[2]

[1]Φοιτητής στο Μαθηματικό ΕΚΠΑ,
[2]MSc Πληροφορικής, 5ο ΓΕΛ Βύρωνα
[1]golfisk@gmail.com, [2]eleni.rompola@gmail.com

Περίληψη

Η ικανότητα μοντελοποίησης των δεδομένων ενός προβλήματος αποτελεί συστατικό στοιχείο της αλγοριθμικής σκέψης. Η παρούσα διδακτική πρόταση αποσκοπεί στην εισαγωγική παρουσίαση των γράφων ως εργαλείο μοντελοποίησης προβλημάτων καθώς και στην ανάδειξη βασικών ιδιοτήτων τους. Η διδασκαλία δεν προαπαιτεί ειδικές γνώσεις μαθηματικών ή πληροφορικής, αλλά επιχειρεί να εμπλέξει τους μαθητές σε διερευνητικές διαδικασίες μέσα από αυθεντικά παραδείγματα τα οποία διατυπώνονται ως διασκεδαστικοί γρίφοι προς επίλυση. Η επιλογή των γρίφων έγινε με τρόπο που δεν επιφορτίζει με αβεβαιότητα τους μαθητές, αλλά τους οδηγεί εποικοδομητικά και αβίαστα προς την αντιμετώπιση ολοένα πιο σύνθετων προβλημάτων, ενώ ταυτόχρονα καθιστά σαφές ότι οι γράφοι μοντελοποιούν προβλήματα όπου η συσχέτιση των οντοτήτων είναι κεντρικής σημασίας.

Λέξεις κλειδιά: Γράφοι, Γραφήματα, Πλήρεις Γράφοι, Επίπεδοι Γράφοι, Χρωματισμός Γράφων, Μοντελοποίηση Δεδομένων, Δομές Δεδομένων.

1. Εισαγωγή

Κατά την αλγοριθμική επίλυση ενός πραγματικού προβλήματος τα πρώτα μεθοδολογικά στάδια περιλαμβάνουν (α) την αφαίρεση περιττών ως προς το πρόβλημα δεδομένων, (β) την αναγνώριση και ει δυνατόν εξάλειψη ειδικών περιπτώσεων έτσι ώστε να επιτευχθεί η μέγιστη δυνατή ομοιομορφία, (γ) την μοντελοποίηση των δεδομένων του προβλήματος. Τα στάδια αυτά, εφόσον διεκπεραιωθούν με τρόπο ευρηματικό και επιστημονικά ορθό, έχουν μεγάλη επίδραση στην απόδοση-πολυπλοκότητα της προγραμματιστικής υλοποίησης που θα ακολουθήσει.

Η δεξιότητα της μοντελοποίησης των δεδομένων ενός προβλήματος εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της αλγοριθμικής σκέψης, και προηγείται του προγραμματισμού. Στην Πληροφορική, αλγόριθμοι και δομές δεδομένων είναι άρρηκτα συνδεδεμένες έννοιες, και η στενή αυτή σχέση δεν μπορεί να φανεί όταν οι μαθητές καλούνται να λύσουν μικρά προβλήματα, τύπου ασκήσεων. Η επεξεργασία και η διερεύνηση πραγματικών προβλημάτων αποτελεί μια καταλληλότερη προσέγγιση.

ISBN:978-960-578-072-2

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει μια διδακτική πρόταση, η οποία απευθύνεται σε μαθητές Λυκείου και η οποία αποσκοπεί στην εισαγωγική παρουσίαση των γράφων ως εργαλείο μοντελοποίησης δεδομένων και στην ανάδειξη στοιχειωδών ιδιοτήτων τους. Οι γράφοι δεν παρουσιάζονται ως μαθηματικές έννοιες, αλλά ως ένα ευέλικτο εργαλείο, χρήσιμο για την μοντελοποίηση πολλών προβλημάτων. Η γνώση κάποιων καλών ιδιοτήτων των γράφων, όπως διαφαίνονται σταδιακά μέσω των παραδειγμάτων, αποτελεί πλεονέκτημα κατά την ανάλυση ενός προβλήματος και δεν απαιτεί κάποιο μαθηματικό υπόβαθρο.

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Ορισμοί

Ακολουθούν οι αναγκαίοι ορισμοί από την βιβλιογραφία (Diestel, 1997), ως αναφορά για τον εκπαιδευτικό. Η παράθεση των μαθηματικών ορισμών δεν αποτελεί διδακτικό στόχο του μαθήματος.

Γράφος ή Γράφημα

Καλούμε γράφημα κάθε διατεταγμένο ζεύγος G = (V,E) όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και E είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του V το καθένα εκ των οποίων έχει δύο στοιχεία του V . Καλούμε τα στοιχεία του V κορυφές του G και τα στοιχεία του E ακμές του G. Για κάθε ακμή e = {v, u} του E, καλούμε τις κορυφές v και u άκρα της e και λέμε ότι οι κορυφές v και u είναι συνδεδεμένες στο G.

Μπορούμε να επιτρέψουμε το σύνολο ακμών να περιέχει και μονοσύνολα τα οποία ορίζουν ακμές με ένα μόνο άκρο τις οποίες καλούμε θηλιές. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε το σύνολο ακμών ως πολυσύνολο όπου το ίδιο στοιχείο μπορεί να παρουσιαστεί περισσότερες από μια φορά. Στην περίπτωση που επιτρέπουμε θηλιές ή πολλαπλές ακμές καλούμε το G πολυγράφημα και οι ακμές που επαναλαμβάνονται καλούνται πολυακμές.

Δεδομένου ενός γραφήματος G, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς V(G) και E(G) για το σύνολο κορυφών και το σύνολο ακμών του αντίστοιχα. Επίσης ορίζουμε n(G) = |V (G)| και m(G) = |E(G)|.

Ισόμορφα Γραφήματα

Δύο γραφήματα G,H, καλούνται ισόμορφα αν υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $f : V(G) \rightarrow V(H)$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in V(G)$ με $x \neq y$, ισχύει ότι $\{x, y\} \in E(G)$ αν και μόνο αν $\{f(x), f(y)\} \in E(H)$. Αν δύο γραφήματα G και H είναι ισόμορφα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $G \simeq H$ και θα λέμε εναλλακτικά ότι το G είναι το ίδιο γράφημα με το H ή, ακόμη απλούστερα, ότι το G είναι το H.

ISBN:978-960-578-072-2

Κλίκα

Για κάθε $r \geq 0$ ορίζουμε το γράφημα : $K_r = (\{v_1, \ldots, v_r\}, \{ \{v_i, v_j\} \mid 1\ i < j \})$ και θα το ονομάζουμε κλίκα με r κορυφές, r-κλίκα ή απλά κλίκα. Ένα γράφημα G με r κορυφές καλείται πλήρες αν $G \approx Kr$

Πλήρες Διμερές Γράφημα

Για κάθε ζεύγος p, $q \geq 0$, ορίζουμε το γράφημα $K_{p,q} = (A \cup B, E)$ έτσι ώστε $A = \{v_1, \ldots, v_p\}$, $B = \{u_1, \ldots, u_q\}$, και $E = \{\{v_i, u_j\} : 1 \leq i \leq p$ και $1 \leq j \leq q\}$ και το ονομάζουμε το πλήρες διμερές γράφημα.

Γειτονιά – Βαθμός Κορυφής

Έστω G γράφημα και έστω $S \subseteq V(G)$. Καλούμε γειτονιά του S στο G το σύνολο $N_G(S) = \{u \in V(G) \setminus S : \exists\ v \in S : \{v, u\} \in E(G)\}$, δηλαδή το σύνολο όλων των κορυφών του G που είναι συνδεδεμένες με τις κορυφές του S και δεν ανήκουν στο S. Αν $v \in V(G)$, ορίζουμε $N_G(v) = N_G(\{v\})$. Αν για μια κορυφή $x \in V(G)$ ισχύει ότι $N_G(x) = \emptyset$ τότε λέμε ότι η x είναι απομονωμένη κορυφή. Ορίζουμε ως βαθμό μιας κορυφής v ενός γραφήματος G την ποσότητα $deg_G(v) = |N_G(v)|$.

Θέωρημα Χειραψίας

Σε κάθε γράφημα G ισχύει $\Sigma_{v \in V(G)} deg_G(v) = 2m(G)$

Επίπεδο Γράφημα

Ένα ένα επίπεδο πολυγράφημα είναι ένα ζεύγος Γ = (V,A) από πεπερασμένα σύνολα που ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες :
1.Κάθε στοιχείο v του V είναι ένα σημείο του R^2 και το καλούμε κορυφή του Γ.
2.Κάθε στοιχείο e του A είναι υποσύνολο του R^2, ομοιομορφικό με το ανοικτό διάστημα(0,1). Τα σημεία που αποτελούν το σύνορο ∂e μιας ακμής e καλούνται άκρα της e και είναι στοιχεία τουV.
3.Διαφορετικές ακμές έχουν κενή τομή.

4.$V \cap (\cup_{e \in E} e) = \emptyset$

Κάθε ένα επίπεδο (πολυ)γράφημα Γ = (V,E) αντιστοιχεί στο (πολυ)γράφημα

$G_\Gamma = (V, \{\partial e \mid e \in E(\Gamma)\})$.

Καλούμε ένα πολυγράφημα G επίπεδο αν υπάρχει ενεπίπεδο πολυγράφημα Γ που να αντιστοιχεί σε πολυγράφημα ισόμορφο του G (δηλ.$G_\Gamma \approx G$). Αν το G είναι ένα επίπεδο πολυγράφημα και Γ ένα επίπεδο πολυγράφημα τέτοιο ώστε $G_\Gamma \approx G$, τότε λέμε ότι το Γ είναι μια επίπεδη εμβάπτιση του G.

Τριγωνοποιημένα Πολύγωνα

Τριγωνοποίηση πολυγώνου, καλούμε τον διαχωρισμό ενός πολυγώνου σε ένα σύνολο τριγώνων, τέτοιο ώστε τα εσωτερικά ανά δύο τριγώνων είναι ξένα και η ένωση των τριγώνων είναι το αρχικό πολύγωνο.

Χρωματισμός Κορυφών Γραφημάτων

Καλούμε k-χρωματισμό κορυφών (ή απλά k-χρωματισμό όταν δεν γίνεται σαφές ότι πρόκειται για άλλου είδους χρωματισμό) ενός γραφήματος G κάθε συνάρτηση $\chi:V(G)\rightarrow \{1,...,k\}$ για την οποία ισχύει ότι $\forall\{x, y\} \in E(G)$ $\chi(v)\neq\chi(u)$. Με άλλα λόγια ένας k-χρωματισμός είναι η ανάθεση ενός «χρώματος» σε κάθε κορυφή του G έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να μη φέρουν το ίδιο χρώμα. Λέμε ότι ένα γραφήμα G είναι k-χρωματίσιμο αν υπάρχει ένας k-χρωματισμός του.

Ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος G είναι ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος k για τον οποίο το G είναι k-χρωματίσιμο και τον συμβολίζουμε με $\chi(G)$.

2.2 Μοντελοποίηση Δεδομένων και Αλγοριθμική Σκέψη

Η Πληροφορική είναι κατά βάση αφαιρετική επιστήμη: κατασκευάζουμε το σωστό μοντέλο για ένα πρόβλημα και επινοούμε τις κατάλληλες μηχανιστικές τεχνικές για την επίλυσή του (Ζάχος, Παγουρτζής, & Σούλιου, 2015). Τα εργαλεία που διαθέτουμε για την επίλυση των προβλημάτων είναι τα μοντέλα δεδομένων, οι δομές δεδομένων και οι αλγόριθμοι. Τα μοντέλα δεδομένων (data models), όπως για παράδειγμα οι γράφοι, αποτελούν αφαιρέσεις που περιγράφουν το πρόβλημα και, σε επόμενο στάδιο, τα μοντέλα αυτά υλοποιούνται προγραμματιστικά με χρήση των δομών δεδομένων που παρέχονται από τις γλώσσες προγραμματισμού.

Η δημιουργία του κατάλληλου μοντέλου δεδομένων είναι, συχνά, μια απαιτητική νοητική πρόκληση και εντάσσεται στο πλαίσιο της αλγοριθμικής σκέψης. Δεν απαιτεί την γνώση κάποιας γλώσσας προγραμματισμού, αλλά την ικανότητα ανάλυσης ενός προβλήματος σε διακριτά συστατικά στοιχεία, την κριτική κατηγοριοποίησή τους σε περισσότερο ή λιγότερο σημαντικά για την επίλυση του προβλήματος, καθώς και την αναγνώριση των αναγκαίων συσχετίσεων. Η αλγοριθμική σκέψη είναι, επομένως, μια ευρύτερη και περισσότερο περίπλοκη διαδικασία από ότι ένας απλός αλγόριθμος (Μαστρογιάννης, 2017) και η καλλιέργειά της συχνά – και πολύ σωστά – περιλαμβάνεται στην στοχοθεσία των μαθημάτων Πληροφορικής (Πολίτης & Κόμης, 1999).

Στην καθημερινότητά μας ερχόμαστε συχνά αντιμέτωποι με φαινόμενα και καταστάσεις που αν ιδωθούν ως προβλήματα προς επίλυση, θα μπορούσαν να μοντελοποιηθούν με γράφους διαφόρων ειδών. Άρα η μετατροπή των φαινομένων αυτών σε προβλήματα ή γρίφους για διδακτική χρήση θα μπορούσε να προσθέσει έναν χαρακτήρα αυθεντικότητας στη διδασκαλία και να αποθαρρύνει την παθητική εκμάθηση μεθοδολογιών επίλυσης ασκήσεων.

ISBN:978-960-578-072-2

3. Η Διδακτική Πρόταση

Η διδακτική πρόταση που παρουσιάζουμε ακολουθεί την στρατηγική της Επαγωγικό-Απαγωγικής Διδασκαλίας. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα ευέλικτη στρατηγική. Μέσω των επαγωγικών διαδικασιών, η διδασκαλία οδηγείται σταδιακά από την απλή παρατήρηση και σύγκριση στη διατύπωση γενικεύσεων ανωτέρου επιπέδου, ενώ με τις απαγωγικές διαδικασίες η διδασκαλία αναζητεί την λογική και αιτιατή εξήγηση των χαρακτηριστικών στοιχείων και φαινομένων που εντόπισε η παρατήρηση και η σύγκριση (Ματσαγγούρας, 2007).

Από πλευράς υλικής υποδομής, καλό είναι να υπάρχει στην τάξη προβολέας, ώστε να διευκολυνθεί η σχηματική παρουσίαση των διαφόρων προβλημάτων και των αντίστοιχων γράφων. Ακολουθεί η αναλυτική περιγραφή των φάσεων της διδασκαλίας, η διάρκεια της οποίας προτείνεται να είναι 3 διδακτικές ώρες.

3.1 Ψυχολογική και Γνωσιολογική Προετοιμασία

Ο στόχος της πρώτης φάσης είναι η δημιουργία του κατάλληλου διδακτικού πλαισίου. Οι δρόμοι των πόλεων, τα ηλεκτρικά κυκλώματα, τα δίκτυα ύδρευσης, τα δίκτυα επικοινωνιών και το Internet, τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης και οι διαπροσωπικές σχέσεις, είναι παραδείγματα από την καθημερινότητα τα οποία για να ζωγραφίσουμε θα αρκούσαν κύκλοι και γραμμές. Κάθε κύκλος αναπαριστά μια πόλη, ένα ηλεκτρικό στοιχείο, έναν υπολογιστή, ένα άτομο, αναλόγως του παραδείγματος, ενώ κάθε γραμμή δείχνει ότι μεταξύ των δύο οντοτήτων που συνδέει υπάρχει κάποια λογική συσχέτιση. Οι μαθητές μπορούν να αναφέρουν πολλά τέτοια παραδείγματα, ως εισαγωγή στο μάθημα.

Ένα, επίσης, όμορφο ερώτημα είναι το φαινόμενο του *Μικρού Κόσμου*, το οποίο έχει παρατηρηθεί σε γράφους μέσων κοινωνικής δικτύωσης και διαπροσωπικών σχέσεων. Το ερώτημα είναι "πόσο απέχουμε, ο καθένας προσωπικά, από ένα οποιοδήποτε γνωστό πρόσωπο, του καλλιτεχνικού, επιστημονικού, πολιτικού κόσμου, κλπ". Γύρω από το ερώτημα αυτό προκαλείται μια σύντομη συζήτηση, αλλά αφήνεται ανοιχτό ώστε να απαντηθεί οριστικά στο τέλος του μαθήματος.

Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει σχηματικά ή με απεικονίσεις της εποχής τις γέφυρες του Königsberg και περιγράφει το πρόβλημα που τέθηκε στον L. Euler (Chartrand, 1984). Μπορεί κανείς να διασχίσει όλες τις γέφυρες της πόλης ακριβώς μια φορά και να επιστρέψει στο σημείο από όπου ξεκίνησε; Η επίλυση του προβλήματος δεν είναι δύσκολη και αφού οι μαθητές εργαστούν αφαιρετικά (π.χ. δεν έχει σημασία το σχήμα της πόλης ή της κάθε γέφυρας – οι μόνες πληροφορίες που χρειάζονται είναι τα τμήματα γης και οι γέφυρες που τα συνδέουν), καταλήγουν στην αναπαράσταση της αρχικής εικόνας με γράφο. Η τελική λύση – το θεώρημα του Euler – ότι σε κάθε κορυφή του γράφου πρέπει να καταλήγει ζυγό πλήθος ακμών για να είναι δυνατός ο ζητούμενος κύκλος, προκύπτει μέσα από καταιγισμό ιδεών.

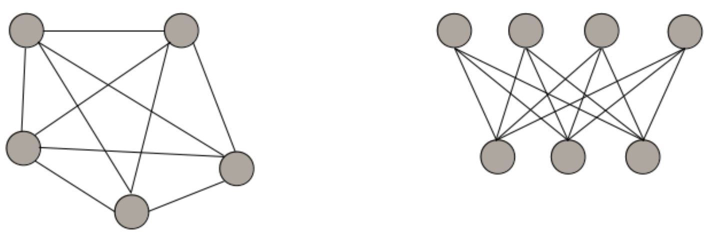
ISBN:978-960-578-072-2

3.2 Παρατήρηση – Περιγραφή – Σύγκριση

Η φάση αυτή περιλαμβάνει επαγωγικές δραστηριότητες. Ο εκπαιδευτικός θέτει τα ερωτήματα, τα οποία έχουν αντληθεί από την καθημερινότητα αλλά παρουσιάζονται με την μορφή γρίφων. Γενικά, προσπαθήσαμε να προσδώσουμε το χαρακτηριστικό της διασκέδασης - με την έννοια της ευχάριστης πνευματικής πρόκλησης - στα προβλήματα αυτά ώστε να δημιουργηθεί ένα θετικό κλίμα στην τάξη. Οι μαθητές καλούνται να κάνουν προσεκτική παρατήρηση και με συστηματικό τρόπο να προβούν στις πρώτες μοντελοποιήσεις των προβλημάτων με χρήση γράφων. Τα παραδείγματα που προτείνουμε είναι:

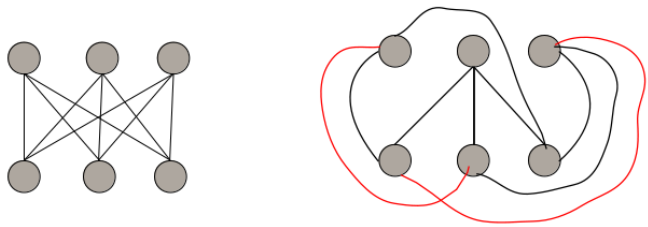
(α) Χειραψίες σε ένα πάρτι: "Όλοι οι μαθητές της τάξης πηγαίνουν σε ένα πάρτι και όλοι θέλουν να χαιρετηθούν με όλους. Πόσες είναι οι συνολικές χειραψίες που θα γίνουν;". Με αυτό τον γρίφο, ο εκπαιδευτικός στοχεύει στην εισαγωγή της έννοιας του πλήρους γράφου και του θεωρήματος της χειραψίας. Οι μαθητές μοντελοποιούν το πρόβλημα ως κλίκα, όπου οι κορυφές αντιπροσωπεύουν τα άτομα και οι ακμές τις χειραψίες, και στη συνέχεια επιχειρούν να μετρήσουν τις ακμές. Σε περίπτωση που κάποιοι δεν χαιρετηθούν με όλους, άρα δεν δημιουργηθεί πλήρες γράφημα, θα πρέπει να αθροιστούν οι χειραψίες και να διαιρεθούν δια του 2. Τελικά, το πρόβλημα γενικεύεται για αριθμό n κορυφών και το πλήθος των ακμών της κλίκας υπολογίζεται σε n*(n-1)/2.

(β) Γνωριμίες στο πάρτι: "Στο ίδιο πάρτι μετά από λίγη ώρα θέλουν όλα τα αγόρια να γνωριστούν καλύτερα με όλα τα κορίτσια και αντιστρόφως. Πόσες συζητήσεις θα γίνουν;". Με αυτό τον γρίφο, ο εκπαιδευτικός στοχεύει στην εισαγωγή της έννοιας του διμερούς γραφήματος. Οι μαθητές μοντελοποιούν το πρόβλημα με ένα πλήρες διμερές γράφημα. Για να το επιτύχουν αυτό, τα αγόρια αναπαρίστανται ως κορυφές που ανήκουν σε ένα σύνολο A και τα κορίτσια ως κορυφές ενός ανεξάρτητου συνόλου B. Οι ακμές συνδέουν κάθε κορυφή του συνόλου A με κάθε κορυφή του συνόλου B, ώστε να αναπαριστούν τις συζητήσεις. Ακολουθεί η προσπάθεια καταμέτρησης των ακμών στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αρχικά διαισθητικά, και στη συνέχεια η γενίκευση για αριθμό n αγοριών και m κοριτσιών, οπότε και το πλήθος ακμών στο πλήρες διμερές γράφημα υπολογίζεται σε n*m.



***Εικόνα 1**. Πλήρης γράφος K_5 και Πλήρης Διμερής γράφος $K_{5,4}$*

(γ) Σπίτια και Εργοστάσια: "Τρία σπίτια πρέπει να συνδεθούν με τρία εργοστάσια παροχής ρεύματος, ύδρευσης, πετρελαίου. Να γίνει ένα σχέδιο όπου οι γραμμές που θα περαστούν από κάθε εργοστάσιο προς κάθε σπίτι δεν πρέπει, για λόγους ασφάλειας, να διασταυρώνονται.". Με αυτό τον γρίφο, ο οποίος στην πραγματικότητα αποτελεί αντιπαράδειγμα, ο εκπαιδευτικός στοχεύει στην εισαγωγή της έννοιας των επίπεδων γράφων. Οι μαθητές επιχειρούν με χαρτί και μολύβι, αλλά ανεπιτυχώς, να ζωγραφίσουν το πλήρες διμερές γράφημα $K_{3,3}$ ως επίπεδο γράφημα. Ο εκπαιδευτικός επιβεβαιώνει την αδυναμία επίλυσης του προβλήματος, αναφέροντας την ύπαρξη μαθηματικής απόδειξης - την οποία δεν παρουσιάζει στους μαθητές - και τονίζοντας ότι η αδυναμία επίλυσης ενός προβλήματος δεν αποδεικνύει ότι το πρόβλημα δεν λύνεται. Στη συνέχεια, η συζήτηση περιστρέφεται γύρω από την έννοια των επίπεδων γραφημάτων και στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η πρώτη διδακτική ώρα.



Εικόνα 2. *Ο πλήρης διμερής γράφος $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο γράφημα*

3.3 Σταδιακή Γενίκευση Επαγωγικών Συμπερασμάτων

Ως αποτέλεσμα των προηγούμενων δραστηριοτήτων, οι μαθητές έχουν καταλήξει σε κάποιες πρώτες διαπιστώσεις σχετικά με την έννοια των γράφων. Θα ήταν επιθυμητό να φτάσουν σε γενικότερα συμπεράσματα, υιοθετώντας έναν βαθμό αφαίρεσης, διότι αυτού του είδους η μάθηση εσωτερικεύεται, διατηρείται και μεταφέρεται εύκολα (Ματσαγγούρας, 2007). Για να το επιτύχει αυτό, ο εκπαιδευτικός κάνει μια σύντομη επαναληπτική αναφορά στα ίδια ή παρόμοια παραδείγματα και θέτει κατάλληλες ερωτήσεις. Τελικά, βεβαιώνεται ότι οι μαθητές μπορούν να περιγράψουν αφαιρετικά και χωρίς εξάρτηση από συγκεκριμένο παράδειγμα, τις έννοιες: (α) γράφος, (β) πλήρης γράφος και θεώρημα της χειραψίας, (γ) επίπεδος γράφος. Εάν το μάθημα γίνεται σε μαθητές με θετικό προσανατολισμό, ο ορισμός των εννοιών αυτών θα μπορούσε να δοθεί και με αυστηρά μαθηματική ορολογία.

3.4 Απαγωγική Επεξεργασία - Τεκμηρίωση

Η απαγωγική επεξεργασία θα επικεντρωθεί στην χρήση των γράφων ως εργαλείο μοντελοποίησης προβλημάτων και στοχεύει στη εξήγηση των μέχρι τώρα διαπιστώσεων. Γενικά, χειριζόμαστε τους γράφους ως σχηματικές αναπαραστάσεις,

ISBN:978-960-578-072-2

σαν σχήματα που με τον δικό τους τρόπο περιγράφουν όσα περιγράφει και η λεκτική διατύπωση του προβλήματος.

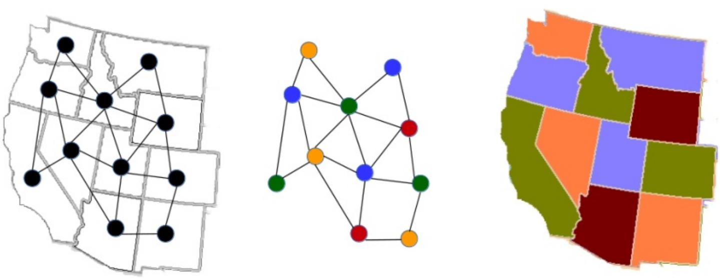
Καλούμε τους μαθητές να εξηγήσουν το γιατί και το πως χρησιμοποιήθηκαν οι γράφοι ως εργαλείο μοντελοποίησης των προηγούμενων γρίφων. Στόχος είναι να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι προβλήματα στα οποία δεν ενδιαφέρουν άλλες ιδιότητες αλλά η σύνδεση και συσχέτιση των οντοτήτων, αυτά τα προβλήματα κατά κανόνα μοντελοποιούνται με χρήση γράφων. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να αναφέρουν δικά τους παραδείγματα που θα μπορούσαν να μοντελοποιηθούν με γράφο, καθώς και αρνητικά παραδείγματα, για τα οποία να αιτιολογήσουν την ακαταλληλότητα των γράφων ως εργαλείο μοντελοποίησης.

3.5 Επέκταση Διαπιστώσεων

Στις επόμενες δύο φάσεις, συνεχίζεται η σε βάθος επεξεργασία του θέματος.

Ο εκπαιδευτικός θέτει το ερώτημα αν ενδείκνυται η χρήση γράφου για το πρόβλημα “Πόσα χρώματα απαιτούνται για να χρωματίσουμε τις χώρες ενός οποιουδήποτε χάρτη έτσι ώστε γειτονικές χώρες να χρωματίζονται με διαφορετικά χρώματα;” και αναμένει από τους μαθητές να αναγνωρίσουν τις οντότητες του προβλήματος (χώρες) καθώς και το γεγονός ότι η γειτνίαση δύο χωρών μπορεί να αναπαρασταθεί ως σύνδεση μεταξύ τους. Συνεπώς η χρήση γράφου είναι κατάλληλη. Οι μαθητές ζωγραφίζουν το γράφημα και υποβοηθούμενοι με κατάλληλες ερωτήσεις από τον εκπαιδευτικό, διαπιστώνουν ότι πρόκειται για επίπεδο γράφο.

Το πρόβλημα μπορεί πλέον να αναδιατυπωθεί: “Πόσα χρώματα απαιτούνται για να χρωματιστούν επίπεδα γραφήματα, με τρόπο ώστε κορυφές που συνδέονται μεταξύ τους να έχουν διαφορετικό χρώμα;”. Για να απαντηθεί το ερώτημα απαιτείται ευρηματική σκέψη και φαντασία. Μέσα από καταιγισμό ιδεών και δοκιμές αρχικά σε μικρούς χάρτες και προχωρώντας σε πιο μεγάλους ή και χάρτες δικής τους επινόησης, οι μαθητές καταλήγουν στην εικασία ότι 4 χρώματα μάλλον αρκούν. Παραμένουν, βέβαια, με την αβεβαιότητα ότι σε κάποιον πολύ πιο μεγάλο χάρτη ίσως τα 4 χρώματα να μην είναι αρκετά.



Εικόνα 3. *Μετατροπή χάρτη σε γράφο και χρωματισμός*

ISBN:978-960-578-072-2

Η εικασία των 4 χρωμάτων επιβεβαιώνεται από τον εκπαιδευτικό ο οποίος, για εγκυκλοπαιδικούς λόγους, εξιστορεί στους μαθητές τις επί σειρά ετών ανεπιτυχείς προσπάθειες των μαθηματικών να αποδείξουν τον ισχυρισμό αυτό. Εν τέλει η εικασία αποδείχθηκε το 1977 από τους Appel και Haken (Appel & Haken, 1977) (Appel, Haken, & Koch, 1997), οι οποίοι ανήγαγαν το πρόβλημα στον χρωματισμό 1936 γράφων και χρησιμοποίησαν υπολογιστή για να αποδείξουν ότι είναι 4-χρωματίσιμοι καθώς και πως κάθε χάρτης θα έχει μια περιοχή που μοιάζει σε κάποιον από αυτούς. Ήταν η πρώτη απόδειξη που έγινε με χρήση Η/Υ και η οποία προκάλεσε αναταραχή στον μαθηματικό κόσμο σχετικά με το τι αποτελεί απόδειξη.

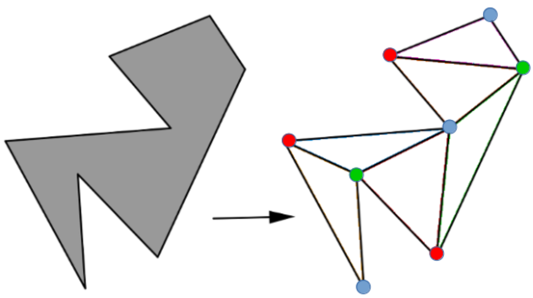
Άλλες δραστηριότητες χρωματισμού γράφων, οι οποίες μπορούν να γίνουν από τους μαθητές ως ασκήσεις εμπέδωσης, είναι ο υπολογισμός των χρωματικών αριθμών για τα ακόλουθα είδη γραφημάτων:

(α) Κλίκες: απάντηση n, αφού κάθε κορυφή συνδέεται με κάθε μια άλλη, άρα κανένα ζεύγος κορυφών δεν γίνεται να μοιράζεται το ίδιο χρώμα.

(β) Διμερείς Γράφοι: απάντηση 2, ένα χρώμα για καθένα από τα δύο ανεξάρτητα σύνολα.

(γ) Κύκλοι: απάντηση 2 για κύκλους άρτιου μήκους και 3 για περιττού μήκους. Επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση του τριγώνου.

(δ) Τριγωνοποιημένα πολύγωνα: απάντηση 3, η οποία θα γενικευτεί εποπτικά με παραδείγματα, ακολουθώντας την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, όπου ξεκινώντας από ένα μικρό πολύγωνο και συνεχίζοντας να προσθέτουμε τρίγωνα σε αυτό, παρατηρούμε ότι δεν ανεβαίνει ο χρωματικός αριθμός.



Εικόνα 4. *Τριγωνοποιημένο πολύγωνο 3-χρωματίσιμο*

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η δεύτερη διδακτική ώρα.

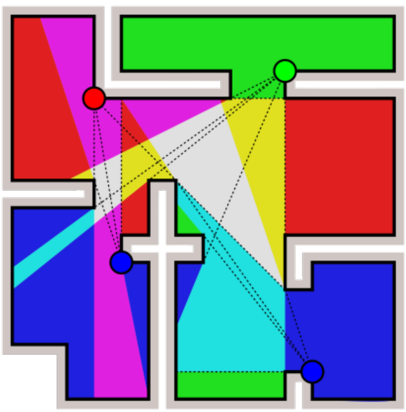
3.6 Εμπέδωση

Στη φάση της εμπέδωσης ο εκπαιδευτικός φέρνει τους μαθητές αντιμέτωπους με νέα, άγνωστα φαινόμενα και τους παρακινεί να τα επεξεργαστούν με παρόμοιο τρόπο.

ISBN:978-960-578-072-2

Επιλέξαμε το πρόβλημα εύρεσης του ελάχιστου πλήθους φρουρών για ένα μουσείο, τη λύση του οποίου πρότεινε ο S. Fisk (Aigner & Ziegler, 2018). Ο χώρος του μουσείου αναπαρίσταται ως ένα τυχαίο πολύγωνο και οι φρουροί πρέπει να τοποθετηθούν σε κατάλληλα σημεία ώστε να φυλάσσονται όλα τα εκθέματα του μουσείου. Θεωρούμε ότι ένα έργο φυλάσσεται όταν υπάρχει τουλάχιστον ένας φρουρός που βλέπει στον χώρο όπου βρίσκεται το έκθεμα. Με την πρόφαση ότι ο διευθυντής του μουσείου είναι τσιγκούνης, ζητούμε να υπολογιστεί το ελάχιστο αναγκαίο πλήθος φρουρών (ουσιαστικά το βέλτιστο άνω φράγμα, δεδομένων των γωνιών του χώρου).

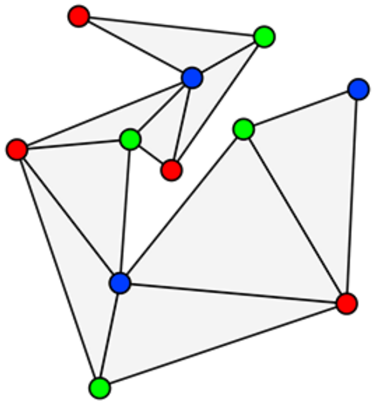
Ο χώρος μοντελοποιείται εύκολα ως γράφημα (γωνίες – κορυφές, τοίχοι – ακμές) και οι μαθητές αναμένεται να σχολιάσουν ότι πρόκειται για επίπεδο γράφο. Δοκιμάζοντας να τοποθετήσουν φρουρούς σε διάφορα σημεία και μέσα από διαλογική διαδικασία, συμπεραίνουν ότι ένας φρουρός βλέπει ένα σημείο όταν η ευθεία γραμμή που συνδέει τον φρουρό με το συγκεκριμένο σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό του πολυγώνου (χώρος του μουσείου).



Εικόνα 5. *Τι βλέπουν οι φρουροί αναλόγως της θέσης τους*

Συσκεπτόμενοι, και αν χρειαστεί υποβοηθούμενοι με κατάλληλες ερωτήσεις από τον εκπαιδευτικό, οι μαθητές καταλήγουν στην ιδέα να τριγωνοποιηθεί ο γράφος. Στο γράφημα που προκύπτει, αν τοποθετηθεί ένας φρουρός σε κάθε κορυφή των τριγώνων, τότε πράγματι το μουσείο είναι πολύ ασφαλές, αλλά δεν έχει επιτευχθεί η απαίτηση για ελάχιστο πλήθος φρουρών. Ο εκπαιδευτικός προτείνει τους μαθητές να χρωματίσουν το γράφο, ο οποίος ως τριγωνοποιημένο πολύγωνο γνωρίζουν ήδη ότι είναι 3-χρωματίσιμος.

ISBN:978-960-578-072-2



Εικόνα 6. *Ο χώρος του μουσείου ως 3-χρωματίσιμο τριγωνοποιημένο πολύγωνο.*

Πλέον, αρχίζει να διαφαίνεται ότι, καθώς σε όλα τα τρίγωνα υπάρχει μια κορυφή από κάθε χρώμα, αν επιλέξουμε ένα από τα τρία χρώματα και σβήσουμε τις κορυφές των άλλων δύο χρωμάτων, τότε σε κάθε τρίγωνο θα παραμείνει ένας φρουρός ο οποίος θα βλέπει τον χώρο του τριγώνου. Άρα με τον τρόπο αυτό λύνεται το πρόβλημα και το ζητούμενο ελάχιστο αναγκαίο πλήθος φρουρών υπολογίζεται ως n/3 (ακέραιος μέρος).

Ας σημειωθεί ότι σε όλες τις φάσεις και για κάθε παράδειγμα οι μαθητές δουλεύουν με χαρτί και μολύβι και βέβαια με χρώματα όπου χρειάζεται. Ο εκπαιδευτικός καλό είναι να έχει προετοιμάσει σε ψηφιακή παρουσίαση κάποιες σχηματικές περιγραφές των γρίφων, ίσως κάποιους ενδιάμεσους γράφους κατά την κρίση του, και βέβαια τον τελικό γράφο που μοντελοποιεί κάθε πρόβλημα, ώστε να κερδίζει χρόνο. Βέβαια, και η χρήση του πίνακα είναι αναπόφευκτη, καθώς οι ιδέες των μαθητών είναι ποικίλες και απρόβλεπτες και πρέπει να γίνονται αντικείμενο συζήτησης.

3.7 Ανακεφαλαίωση - Μαθησιακή και Μεταγνωστική Αξιολόγηση

Η διδασκαλία κλείνει με ανακεφαλαίωση, σχηματική και απολογιστική, και ακολουθεί η μαθησιακή και μεταγνωστική αξιολόγηση. Επιμένουμε περισσότερο στην μεταγνωστική αξιολόγηση, στο να περιγράψουν και συνειδητοποιήσουν οι μαθητές την όλη πορεία της λογικής επεξεργασίας που προηγήθηκε, διότι ο κύριος στόχος του μαθήματος είναι να μπορούν να χρησιμοποιούν παραγωγικά τη νέα γνώση.

Τέλος, ο εκπαιδευτικός επανέρχεται στο φαινόμενο του *Μικρού Κόσμου* και περιγράφει το πείραμα του Stanley Milgram (Milgram & Travers, 1969) το οποίο επιβεβαιώνει την υπόθεση του Ούγγρου συγγραφέα Frigyes Karinthy (Karinthy, 1929) ότι ο κόσμος είναι τόσο μικρός που δύο τυχαία επιλεγμένοι άνθρωποι απέχουν το πολύ κατά 6 γνωστούς (6 degrees of separation). Στο πείραμα του Milgram ένα σύνολο ατόμων έλαβαν από ένα γράμμα και τους ζητήθηκε να το προωθήσουν στον αναγραφόμενο παραλήπτη. Αν ο τελικός παραλήπτης τους ήταν άγνωστος, έπρεπε να προωθήσουν το γράμμα σε δικό τους γνωστό πρόσωπο το οποίο ίσως να γνώριζε τον τελικό παραλήπτη. Σε όσες περιπτώσεις η αλυσίδα των προωθήσεων δεν διακόπηκε, αποδείχθηκε ότι χρειάστηκαν κατά μέσο όρο 6 βήματα για να φθάσουν τα γράμματα στους τελικούς παραλήπτες. Το φαινόμενο αυτό επιβεβαιώνεται και από επίσημα στατιστικά στοιχεία του Facebook και του Twitter (Bhagat, Burke, Diuk, Filiz, & Edunov, 2016), τα οποία καταδεικνύουν ότι η μέση απόσταση μεταξύ δύο τυχαίων χρηστών, μετρούμενη σε πλήθος κοινών φίλων, δεν ξεπερνά τα 4 άτομα! Θα είχε ενδιαφέρον να δοκιμάσουν οι μαθητές το πείραμα του *Μικρού Κόσμου* στον μικρόκοσμο του δήμου στον οποίο κατοικούν.

4. Συμπεράσματα

Οι γράφοι, ως δομή δεδομένων και κυρίως η χρήση τους ως εργαλείο μοντελοποίησης δεδομένων, έχουν εισαχθεί πρόσφατα στην διδακτέα ύλη του μαθήματος "Πληροφορική" της Γ τάξης, αν και σε περιορισμένο βαθμό και πάντως δυσανάλογο του μεγάλου πεδίου εφαρμογής τους. Το θετικό, κατά τη γνώμη μας, στοιχείο αυτής της προσθήκης έγκειται στην αναγνώριση πως οι μαθητές του Λυκείου χωρίς πρότερες μαθηματικές γνώσεις επί του αντικειμένου, είναι προφανώς σε θέση να χρησιμοποιήσουν τα γραφήματα ως αναπαραστάσεις δεδομένων.

Ελπίζοντας ότι η κάλυψη της διδακτέας ύλης πληροφορικής της Α και Β τάξης, αφήνει κάποια χρονικά περιθώρια στον εκπαιδευτικό να πειραματιστεί και με διδακτικά αντικείμενα που δεν περιλαμβάνονται στο ΑΠΣ των τάξεων αυτών, καταθέτουμε την παρούσα διδακτική πρόταση ως ένα σύνολο δραστηριοτήτων που εξασκούν την αλγοριθμική σκέψη των μαθητών και που τους προετοιμάζουν για την αντίστοιχη ύλη της Γ τάξης.

Η διδακτική μας πρόταση περιλαμβάνει κατάλληλα παραδείγματα-προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο τα οποία οι μαθητές καλούνται να συζητήσουν, να επεξεργαστούν συνεργατικά και τελικά να μοντελοποιήσουν, χωρίς να στηριχθούν σε μαθηματικές γνώσεις. Κάθε παράδειγμα-πρόβλημα, ξεκινώντας από το αρχικό και απλούστερο όλων, αφού μελετηθεί και μοντελοποιηθεί, αναδεικνύει και μια νέα ιδιότητα των γράφων, έτσι ώστε οι μαθητές να προχωρήσουν εποικοδομητικά και αβίαστα από τον ιστορικό γράφο του Euler για τις Γέφυρες του Königsberg μέχρι τις διαδικασίες χρωματισμού τριγωνοποιημένων γραφημάτων. Συνοπτικά, οι έννοιες που τελικά θα έχουν διερευνηθεί από τους μαθητές είναι: (α) πλήρης γράφος, (β) διμερείς γράφοι, (γ) θεώρημα της χειραψίας, (δ) επίπεδοι γράφοι, (ε) τριγωνοποιημένα πολύγωνα, (στ) χρωματισμός γράφων. Απώτερος στόχος είναι να γίνουν οι μαθητές ικανοί για παραγωγική χρήση της νέας γνώσης. Να μπορούν δηλαδή να εφαρμόζουν διαδικασίες μοντελοποίησης με γράφους και σε νέα, άγνωστα προβλήματα, εκμεταλλευόμενοι όπου αυτό είναι δυνατό τις καλές ιδιότητες των γράφων.

ISBN:978-960-578-072-2

Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση παρουσιάστηκε πειραματικά σε μικτή ομάδα 20 μαθητών Α και Β τάξης του 5ου ΓΕΛ Βύρωνα. Οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά και με ενθουσιασμό κι αυτό αποτελεί για μας ένα θετικό κίνητρο για την επανάληψη της διδασκαλίας και τα επόμενα σχολικά έτη σε κανονικές, πλέον, τάξεις και ίσως την επέκτασή της ώστε να περιλαμβάνει και τεχνικές διαπέρασης γράφων.

Αναφορές

Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2018). *Proofs from THE BOOK.* Berlin: Springer.

Appel, K., & Haken, W. (1977). Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics , 21* (3), σσ. 429-490.

Appel, K., Haken, W., & Koch, J. (1997). Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics , 21* (3), σσ. 491-567.

Bhagat, S., Burke, M., Diuk, C., Filiz, I., & Edunov, S. (2016). *Three and a half degrees of separation.* Ανάκτηση 7 31, 2020, από FACEBOOK Research: https://research.fb.com/blog/2016/02/three-and-a-half-degrees-of-separation/

Chartrand, G. (1984). *Introductory Graph Theory.* New York: Dover Publications.

Diestel, R. (1997). *Graph Theory. Electronic Edition 2000.* New York: Springer-Verlag.

Karinthy, F. (1929). *Karinthy Chain Links.* Ανάκτηση 7 31, 2020, από Dan Ryan: http://djjr-courses.wikidot.com/soc180:karinthy-chain-links

Milgram, S., & Travers, J. (1969). An Experimental Study of the Small World Problem. *Sociometry , 32* (4), σσ. 425-443.

Ζάχος, Σ., Παγουρτζής, Ά., & Σούλιου, Δ. (2015). *Θεμελίωση Επιστήμης Υπολογιστών.* Αθήνα: ΣΕΑΒ.

Μαστρογιάννης, Α. (2017). Η αλγοριθμική σκέψη ως θεμελιακή συνιστώσα της μαθηματικής σκέψης στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση. *Νέος Παιδαγωγός, Διαδικτυακό περιοδικό εκπαιδευτικής αρθρογραφίας.* (8), σσ. 173-261.

Ματσαγγούρας, Η. Γ. (2007). *Στρατηγικές Διδασκαλίας*. Αθήνα: Gutenberg.

Πολίτης, Π., & Κόμης, Β. (1999). Η Πληροφορική ως βασικό μάθημα της Γ τάξης της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης του Ενιαίου Λυκείου: αλγοριθμική έναντι προγραμματιστικής προσέγγισης. *4ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση*, (σσ. 344-348). Ρέθυμνο.

Abstract

The ability to properly model the various parts of a problem is a vital element of algorithmic thinking. This educational proposal aims at introducing graphs as a problem-modelling tool as well as highlighting some of their basic properties. No special knowledge in either math or informatics is required in order for the students to uderstand this proposal's subject matter, while they are encouraged to participate in investigational activities by using original examples which are presented as entertaining riddles for them to solve. The selection of these riddles was made in a way that doesn't burden students with uncertainty. Instead, they are led constructively and naturally towards solving problems of increasing complexity, while making it clear that graphs can be used for modeling problems when the correlation of the entities is of the utmost importance.

Keywords: Graph, Complete Graph, Planar Graph, Graph Colouring, Data Modeling, Data Structures.