Μια Κρουαζιέρα στο Ποτάμι: Από την Αναλυτική Επίλυση Προβλήματος στην Υπολογιστική Σκέψη

Περικλής Γεωργιάδης

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου, perge@sch.gr

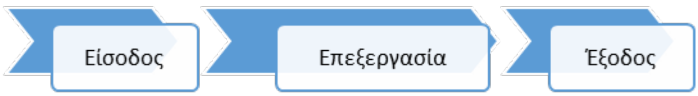
Περίληψη

Περιγράφουμε την αξιοποίηση ενός απλού προβλήματος κινηματικής φυσικής σε τρεις διαφορετικές τάξεις λυκείου, για το οποίο οι μαθητές καλούνται να αναπτύξουν αλγόριθμο, πρόγραμμα ή υποπρόγραμμα επίλυσης, εφαρμόζοντας γνώσεις φυσικής και άλγεβρας που ήδη κατέχουν. Ενώ η επίλυση οποιουδήποτε στιγμιότυπου του προβλήματος ήταν σχετικά απλή, το άλμα από εκεί στην παραμετρική μορφή σε ό,τι αφορά την αναλυτική προσέγγιση στην Άλγεβρα, και στη μορφή δεδομένων εισόδου για αλγόριθμο ή παραμέτρων υποπρογράμματος υπό το πρίσμα της υπολογιστικής σκέψης, ανέδειξε δυσκολίες και στα τρία ακροατήρια. Η αναγωγή από το μερικό στο γενικό, η αναγνώριση προτύπων, η μεταφορά και εφαρμογή γνώσης και ιδεών από ένα πεδίο σε άλλο, δεξιότητες που περιλαμβάνει η Υπολογιστική Σκέψη, φάνηκε ότι κατακτούνται σε διαφορετικό βαθμό, παρόλη την κατά τεκμήριο επάρκεια του αναγκαίου γνωστικού υπόβαθρου και την απουσία της όποιας πολυπλοκότητας.

Λέξεις κλειδιά: υπολογιστική σκέψη, διεπιστημονική προσέγγιση, μάθηση μέσω επίλυσης προβλήματος, δευτεροβάθμια εξίσωση, λύκειο.

1. Εισαγωγή

Μία πολύ συνηθισμένη κατηγορία προβλημάτων που αξιοποιούνται κατά την εισαγωγή του μαθητή στην Αλγοριθμική και τον Προγραμματισμό είναι αυτά που βασίζονται στο τρίπτυχο (α) εισαγωγή δεδομένων – (β) εφαρμογή κάποιων τύπων από ένα πεδίο προγενέστερης γνώσης (Μαθηματικά, Φυσική, μονάδες μέτρησης, κ.ο.κ.) που μετασχηματίζουν τα δεδομένα – (γ) έξοδος.



Εικόνα 1. *Το βασικό μοτίβο εισαγωγικών ασκήσεων στον Προγραμματισμό*

Η κατηγορία των προβλημάτων αυτών διευκολύνει την εξοικείωση με την αλγοριθμική δομή της ακολουθίας, τις μεταβλητές, τις εκφράσεις και την ανάθεση τιμών, καθώς και τις λειτουργίες της εισόδου και της εξόδου. Σε ένα επόμενο στάδιο πολυπλοκότητας, η φάση της επεξεργασίας δεδομένων μπορεί να συμπεριλαμβάνει τη δομή επιλογής, πάντοτε σε ευθεία εφαρμογή έτοιμων τύπων και μεθόδων από διάφορα γνωστικά αντικείμενα.

ISBN:978-960-578-072-2

Η παιδαγωγική αξία τέτοιων προβλημάτων προκύπτει κυρίως από την απόκτηση δεξιοτήτων που αφορούν νέες έννοιες, με τον ευθύ μετασχηματισμό πρότερης γνώσης και προτύπων, από τις έννοιες, τη γλώσσα και το συμβολικό κόσμο ενός πεδίου (Μαθηματικά, ή Φυσική), σε αυτά του Προγραμματισμού. Ωστόσο, θα έπρεπε, αυστηρότερα, να ονομάζονται απλώς ασκήσεις, καθώς σε μικρό βαθμό μόνο ενεργοποιούν τη δημιουργικότητα και τη φαντασία του μαθητή (Μαμονά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

Ο μετασχηματισμός εμπειρίας και γνώσης από ένα πεδίο και η μεταφορά τους σε ένα άλλο αποτελεί μία από τις συνιστώσες που αναγνωρίζονται στην Υπολογιστική Σκέψη (Wing, 2014), και δεν είναι αμελητέα στην παραπάνω κατηγορία ασκήσεων. Σε τέτοιες ασκήσεις κύριος στόχος παραμένει η κατάκτηση νέας γνώσης για τον μαθητή, εισαγωγικής στο νέο γι' αυτόν πεδίο της Αλγοριθμικής ή του Προγραμματισμού. Γι' αυτό, η πολυπλοκότητα και οι απαιτήσεις του παραπάνω μετασχηματισμού παραμένουν χαμηλές, ώστε να προκύπτει σχετικά αβίαστα, διατηρώντας την εστίαση στις νέες έννοιες του νέου πεδίου.

Στη συνέχεια, περιγράφουμε την αξιοποίηση ενός απλού προβλήματος κινηματικής φυσικής (mathfacts.com, 2019) σε τρεις διαφορετικές τάξεις λυκείου, για το οποίο οι μαθητές καλούνται να αναπτύξουν αλγόριθμο, πρόγραμμα ή υποπρόγραμμα επίλυσης, εφαρμόζοντας γνώσεις φυσικής και άλγεβρας που ήδη κατέχουν. Το πρόβλημα αυτό, σε μία πρώτη προσέγγιση, θα μπορούσε να καταταχθεί στην οικογένεια των ασκήσεων που περιγράφηκαν πιο πάνω. Η ιδιαιτερότητά του, ωστόσο, επιτρέπει την προσέγγισή του από τους μαθητές ως πραγματικού προβλήματος, και την ανάδειξη της διεπιστημονικότητας μέσω της καλλιέργειας της Υπολογιστικής Σκέψης (ΥΣ). Η χρήση του σε όλες τις τάξεις επέτρεψε να διαπιστωθούν περιπτώσεις διαφορετικών εμποδίων για τους μαθητές του συγκεκριμένου δείγματος, χωρίς να μπορούν να γίνουν γενικότερες αναγωγές.

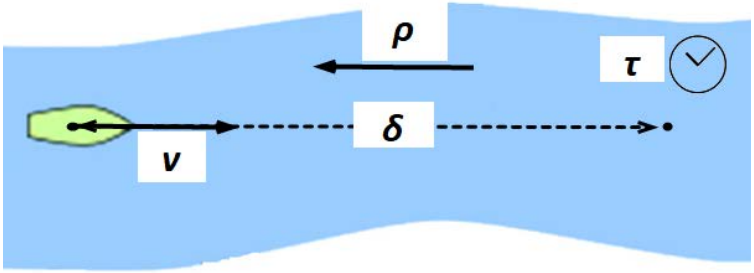
2. Το πρόβλημα - πλαίσιο της διεπιστημονικής προσέγγισης

Στην εικόνα 2 φαίνεται το τουριστικό ποταμόπλοιο μιας επιχείρησης που διοργανώνει κρουαζιέρες περιήγησης στο ποτάμι μιας πόλης. Από το σημείο αναχώρησης, το σκάφος αρχικά διασχίζει το ποτάμι πηγαίνοντας μέχρι το πιο μακρινό σημείο της διαδρομής, και στη συνέχεια επιστρέφει εκεί που ξεκίνησε, κάνοντας την αντίστροφη διαδρομή. Η κρουαζιέρα έχει σταθερή διάρκεια ασχέτως συνθηκών. Το ποτάμι ρέει με διαφορετική ταχύτητα κάθε μέρα. Προκειμένου η διάρκεια της κρουαζιέρας να είναι σταθερή όλες τις ημέρες, το πλοίο πρέπει να προσαρμόζει την ταχύτητά του στο νερό, με βάση εκείνη του ρεύματος του ποταμού (θεωρούμε ομαλή ευθύγραμμη κίνηση, και για το πλοίο, και για τον ποταμό).

Το παραπάνω σενάριο δίνει την ευκαιρία να προσεγγιστεί διεπιστημονικά το γενικό πρόβλημα, όπου με βάση τα τρία δεδομένα, το μήκος της (ημι)διαδρομής (πήγαινε ή έλα), την ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού, και την επιθυμητή διάρκεια της

ISBN:978-960-578-072-2

πλεύσης, μπορεί να υπολογιστεί η αναγκαία ταχύτητα που πρέπει να έχει το σκάφος στο νερό.



Εικόνα 2. *Μια κρουαζιέρα με ποταμόπλοιο*

Έτσι, στην απλούστερη εκδοχή του προβλήματος, ο μαθητής ο οποίος έχει διδαχθεί τη δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ στην Άλγεβρα και την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στη Φυσική, με τη βασική σχέση $v=s/t$ που συνδέει τα μεγέθη σταθερής ταχύτητας, διαστήματος και χρόνου, και ο οποίος κατανοεί επίσης τη συνισταμένη ταχύτητα του πλοίου σε σχέση με την ξηρά, μπορεί να λύσει αλγεβρικά οποιοδήποτε στιγμιότυπο του προβλήματος.

2.1 Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος

Έστω, για παράδειγμα, ότι η επιθυμητή διάρκεια είναι 3 ώρες, το πλοίο διασχίζει 8 χιλιόμετρα στη μία κατεύθυνση και άλλα τόσα στην επιστροφή, και ότι το ποτάμι κυλάει με ταχύτητα 2 χλμ/ω. Αν v είναι η ζητούμενη ταχύτητα του πλοίου στο νερό, τότε ο συνολικός χρόνος t των 3 ωρών είναι το άθροισμα t_1+t_2 των επιμέρους χρόνων t_1 και t_2 της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης του πλοίου για 8 χλμ με ταχύτητα v-2 χλμ/ω και άλλων 8 χλμ με ταχύτητα v+2 χλμ/ω.

$$\frac{8}{v-2}+\frac{8}{v+2}=3 \qquad \textbf{(1)}$$

Η εξίσωση 1 γίνεται ισοδύναμα $3v^2-16v-12=0$, η οποία έχει θετική διακρίνουσα Δ=400, και μία θετική ρίζα v=6. Συνεπώς, η σταθερή ταχύτητα στην οποία θα ρυθμιστεί το σκάφος στο νερό είναι 6 χλμ/ω, οπότε θα ανέβει κόντρα στο ποτάμι σε 2 ώρες με συνισταμένη ταχύτητα ως προς την ξηρά 4 χλμ/ω, και θα επιστρέψει αντίστοιχα σε 1 ώρα με 8 χλμ/ω.

Υπό την προϋπόθεση της κατανόησης της σχετικής κίνησης ενός κινητού επάνω σε ένα άλλο κινητό, ο μαθητής που έχει εποπτεία του φαινομένου της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, ακόμη και εμπειρικά, είναι σε θέση να καταστρώσει την εξίσωση 1. Εφόσον έχει βασικές αλγεβρικές δεξιότητες, εφαρμόζει «τυφλά» στη συνέχεια τη διαδικασία απαλοιφής παρονομαστών και επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και βρίσκει την ζητούμενη τιμή.

ISBN:978-960-578-072-2

Παρ’ όλ’ αυτά, ο μαθητής, περιοριζόμενος στην τυφλή, όπως την ονομάσαμε, εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων, δεν χρειάζεται να προβληματιστεί και δεν αποκτά κάποια ευρύτερη εικόνα γύρω από το πρόβλημα. Για παράδειγμα, ενδιαφέροντα ερωτήματα, υπό το πρίσμα της Κινηματικής, όπως αν είναι πάντοτε εφικτή η πλεύση για οποιαδήποτε ταχύτητα του ποταμού, ή υπό το πρίσμα της Άλγεβρας, αν είναι πιθανό να υπάρχουν δύο θετικές ρίζες, ή αρνητική διακρίνουσα, ποιο είναι το εύρος τιμών της ζητούμενης απάντησης, κ.ο.κ., περνούν ανεκμετάλλευτα. Όπως το ίδιο συμβαίνει με την ευκαιρία να αναδειχθεί η ισοδυναμία μεταξύ των ερωτημάτων υπό τα δύο πρίσματα, Φυσικής και Άλγεβρας.

2.2 Αναλυτική προσέγγιση του προβλήματος

Ας γενικεύσουμε τις παραμέτρους του προβλήματος, ονομάζοντας δ το μήκος της ημιδιαδρομής, ρ την ταχύτητα του ποταμού και τ τον επιδιωκόμενο συνολικό χρόνο πλεύσης. Η εξίσωση 1 μετασχηματίζεται τώρα στην εξίσωση 2:

$$\frac{\delta}{v-\rho}+\frac{\delta}{v+\rho}=\tau \tag{2}$$

Ισοδύναμα, η εξίσωση αυτή δίνει την εξίσωση 3:

$$\tau v^2-2\delta v-\tau\rho^2=0 \tag{3}$$

Για την εξίσωση 3 (ως προς v), ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η Διακρίνουσα έχει την τιμή $\Delta = 4\delta^2+4\tau^2\rho^2$, η οποία είναι πάντοτε θετική, άρα υπάρχουν πάντοτε δύο ρίζες.
- Το γινόμενο των ριζών της ισούται με $-\rho^2$, τιμή πάντοτε αρνητική, που σημαίνει ότι οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες, η μία θετική και η άλλη αρνητική.
- Οι δύο ρίζες δίνονται από την παράσταση 4:

$$\frac{\delta\pm\sqrt{\delta^2+\tau^2\rho^2}}{\tau} \tag{4}$$

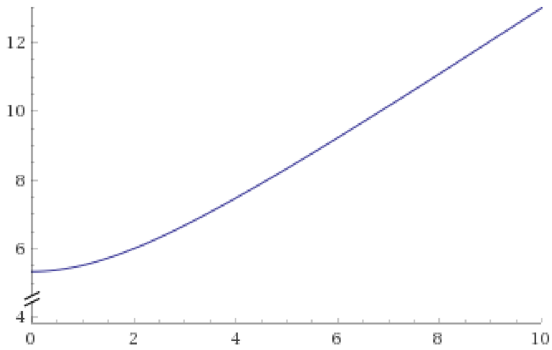
- Από αυτές, η ρίζα που δίνεται με το + στον δεύτερο όρο του αριθμητή (παράσταση 5) είναι πάντοτε θετική, και αποτελεί τη ζητούμενη λύση στο γενικευμένο πρόβλημα:

$$\frac{\delta+\sqrt{\delta^2+\tau^2\rho^2}}{\tau} \tag{5}$$

- Το άθροισμα τετραγώνων στο υπόρριζο της παράστασης 5 περιλαμβάνει και τις τρεις παραμέτρους, και επιτρέπει στο διδάσκοντα να χρησιμοποιήσει πυθαγόρειες τριάδες στα στιγμιότυπα-παραδείγματα, ώστε να προκύπτουν ρητές ποσότητες ως απάντηση. Για παράδειγμα, στο στιγμιότυπο που αναφέρθηκε στα προηγούμενα, από την πυθαγόρεια τριάδα (6, 8, 10), επιλέξαμε δ=8, τ=3 και ρ=2.

ISBN:978-960-578-072-2

- Η παράσταση 5, με σταθερές τις τιμές για τα *δ* και *τ*, δηλώνει τη συνάρτηση *v*(*ρ*) που επιστρέφει την απαιτούμενη ταχύτητα *v* για οποιαδήποτε ταχύτητα ρεύματος *ρ*. Η γραφική παράστασή της είναι μια υπερβολή. Ένα τέτοιο παράδειγμα, για δ=8 και τ=3, δίδεται στην εικόνα 3.



Εικόνα 3. *Γραφική παράσταση της v(ρ) για δ=8 και τ=3*

Η παραπάνω αλγεβρική αναλυτική προσέγγιση στο γενικευμένο πρόβλημα, επιτρέπει να συζητήσουμε με τους μαθητές το πρόβλημα γενικότερα.

Το σκάφος, πλέοντας κόντρα στο ρεύμα, χάνει από το μέτρο της ταχύτητάς του *v* το μέτρο της ταχύτητας *ρ* του ποταμού που έχει αντίθετη φορά. Για κάθε *v΄* μέτρα που κυλά μπροστά σε κάποιο χρονικό διάστημα, ο ποταμός το φέρνει πίσω κατά *ρ΄* μέτρα.

Το αντίστροφο συμβαίνει όταν το σκάφος κινείται έχοντας το ρεύμα υπέρ του, πίσω του. Τότε κερδίζει από το μέτρο της ταχύτητάς του *v* ολόκληρο το μέτρο της ταχύτητας *ρ* του ποταμού που έχει ίδια φορά. Για κάθε *v΄* μέτρα που κυλά μπροστά σε κάποιο χρονικό διάστημα, ο ποταμός το φέρνει ακόμη πιο μπροστά κατά *ρ΄* μέτρα.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει καθόλου ρεύμα ($\rho = 0$), για να διαρκέσει η πλεύση χρόνο τ, η ταχύτητα του σκάφους θα είναι $2\delta/\tau$. Για οποιοδήποτε ρεύμα $\rho > 0$, το σκάφος πρέπει να αναπτύξει ταχύτητα μεγαλύτερη από $2\delta/\tau$ και μικρότερη $2\delta/\tau+\rho$. Για οποιεσδήποτε (θετικές) τιμές των παραμέτρων *δ*, *ρ*, και *τ* υπάρχει πάντοτε τιμή για την ταχύτητα *v* που πρέπει να αναπτύξει το σκάφος στο νερό (σε αντιστοιχία ακριβώς με την ύπαρξη θετικής πάντοτε Διακρίνουσας), καθώς η πλεύση του περιλαμβάνει και τα δύο σκέλη ως προς το ρεύμα· όσο και να καθυστερεί από το τελευταίο όταν πηγαίνει κόντρα, στην επιστροφή κερδίζει τον χαμένο χρόνο. Ωστόσο, όσο πιο μεγάλο είναι το ρεύμα, ή μικρή η ζητούμενη διάρκεια, τόσο πιο δυσανάλογα σύντομη θα είναι η επιστροφή σε σχέση με την πλεύση κόντρα στο ρεύμα.

ISBN:978-960-578-072-2

3. Αξιοποίηση στο πλαίσιο της Υπολογιστικής Σκέψης

Παρά το μικρό του μέγεθος και τις λίγες απαιτήσεις προγραμματισμού, υπό την έννοια των απαιτούμενων αλγοριθμικών δομών, μεταφέροντας το πρόβλημα που εξετάζουμε στο πεδίο της Αλγοριθμικής και του Προγραμματισμού, δίδεται η δυνατότητα να καλλιεργηθούν αρκετές από τις συνιστώσες της ΥΣ (Wing, 2006), όπως η αφαίρεση, η ανάλυση, η αναγνώριση προτύπων, η μεταφορά και εφαρμογή γνώσης και ιδεών από ένα πεδίο σε άλλο, η αναγωγή από το μερικό στο γενικό. Μάλιστα, ο ίδιος ο ορισμός της ΥΣ από την Wing, προσεκτικά αναθεωρημένος, λέξη προς λέξη, όπως λέει χαρακτηριστικά η ίδια (Wing, 2014), ως «*οι νοητικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη διατύπωση ενός προβλήματος και στην έκφραση της/των λύσης/εων του, με τέτοιο τρόπο που ένας υπολογιστής -άνθρωπος ή ηλεκτρονικός- μπορεί να την/τις εφαρμόσει αποτελεσματικά*» έχει πιστή εφαρμογή στο πρόβλημά μας. Ακόμη, καθώς ο χώρος της ΥΣ αποτελεί προνομιακό πεδίο για την διεπιστημονική προσέγγιση με παραδείγματα από όλα σχεδόν τα πεδία (Γεωργιάδης, 2016), αξιοποιούνται σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις από τον χώρο της κοινωνικής εποικοδομητικής θεωρίας (Vygotsky, 1997) και της θεωρίας επεξεργασίας της πληροφορίας (Schunk, 2011): η ομαδοσυνεργατική προσέγγιση, η βασισμένη σε ερωτήματα ή/και προβλήματα μάθηση και ο καταιγισμός ιδεών, καθώς περιορίζονται σε μεγάλο βαθμό οι συμπεριφοριστικές διδακτικές στρατηγικές.

3.1 Εφαρμογή στην τάξη και από απόσταση

Το πρόβλημα τέθηκε με μικρές παραλλαγές σε ένα τμήμα καθεμιάς από τις τρεις τάξεις του Πειραματικού Λυκείου Ηρακλείου το σχολικό έτος 2019-20: ένα τμήμα του μαθήματος επιλογής Εφαρμογές Πληροφορικής της Α΄ Τάξης, στο οποίο διδάσκεται η γλώσσα Python 3.7, ένα τμήμα του μαθήματος γενικής παιδείας Εισαγωγή στις Αρχές της Επιστήμης των Η/Υ της Β΄ Τάξης, καθώς και σε ένα τμήμα του μαθήματος Προσανατολισμού Πληροφορική της Γ΄ Τάξης. Στα δύο πρώτα, η δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε πριν την αναστολή των δια ζώσης μαθημάτων, και αφού είχαν διδαχθεί ήδη οι δομές ακολουθίας και επιλογής. Στην Γ΄ Τάξη η δραστηριότητα έγινε εξ αποστάσεως, στο περιβάλλον σύγχρονης τηλεκπαίδευσης Ζωντανά Ηλεκτρονικά Μαθήματα του Πανελλήνιου Σχολικού Δικτύου (ΠΣΔ, 2020), στο τέλος Μαρτίου, κατά την έναρξη επαναληπτικών μαθημάτων, αφού είχε καλυφθεί όλη η ύλη. Και στις τρεις τάξεις είχε ήδη υλοποιηθεί ο αλγόριθμος επίλυσης της εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$, για οποιεσδήποτε τιμές των α, β και γ.

Χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας για κάθε τμήμα, και υπήρξε πρόνοια να μην έχει πραγματοποιηθεί η δραστηριότητα από τους μαθητές σε προηγούμενη τάξη. Οι μαθητές της Α΄ Τάξης εργάστηκαν κατά ζεύγη σε 11 θέσεις εργασίας του εργαστηρίου Πληροφορικής με το ολοκληρωμένο περιβάλλον Thonny 3.2.1 (thonny.org, 2015), ενώ της Β΄ Τάξης κατά ζεύγη στην αίθουσα, με χρήση υπολογιστή κατά περίπτωση στη θέση εργασίας του διδάσκοντα με το ολοκληρωμένο

ISBN:978-960-578-072-2

περιβάλλον Διερμηνευτής της ΓΛΩΣΣΑΣ 1.5.1 (Γεωργόπουλος, Α. (2001) σε λειτουργία Ψευδογλώσσας. Στην Γ΄ Τάξη οι μαθητές εργάστηκαν αυτόνομα, με χρήση του Διερμηνευτή της ΓΛΩΣΣΑΣ 1.5.1, εναλλαγή στους ρόλους παρουσιαστή - ακροατηρίου, κοινό πίνακα σημειώσεων, και διαμοιρασμό της επιφάνειας εργασίας τους. Η δραστηριότητα διήρκεσε 2 συνεχόμενες διδακτικές ώρες για τις δύο πρώτες τάξεις, και 70 λεπτά στην Γ΄ Τάξη.

Οι μαθητές αρχικά κλήθηκαν να απαντήσουν σε στιγμιότυπο του προβλήματος με ρητή ρίζα, αντίστοιχο της ενότητας 2.1 παραπάνω (δραστηριότητα 1). Με στόχο να μπορέσουν όλοι οι μαθητές να εκκινήσουν με αφετηρία μια εξίσωση παρόμοια με την 1, ερωτήματα εξειδίκευσης ζητούσαν τις διάρκειες των επιμέρους δύο σκελών της πλεύσης, κόντρα και ευνοϊκά με το ρεύμα, ποια ήταν μεγαλύτερη και γιατί. Για τα ερωτήματα αυτά έγινε συζήτηση στην ολομέλεια και υπήρξε καταιγισμός ιδεών.

Επόμενα ερωτήματα έθεταν τον προβληματισμό, αν υπάρχουν (θετικές) τιμές των δεδομένων από τις οποίες να προκύπτει ότι το πρόβλημα δεν έχει απάντηση, για αρνητική διακρίνουσα, ή αν γίνεται να υπάρχουν δύο λύσεις, για δύο θετικές ρίζες.

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να παραμετροποιήσουν την προηγούμενη λύση του στιγμιότυπου, αντικαθιστώντας τις τρεις σταθερές τιμές, με «γράμματα» μεταβλητών - παραμέτρων, υπό την μαθηματική έννοια, να εφαρμόσουν τα ίδια με πριν βήματα, λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα ερωτήματα προβληματισμού, και να καταλήξουν σε παραμετρικές, αντί αριθμητικών προηγουμένως, απαντήσεις (δραστηριότητα 2). Έγινε ανταλλαγή απόψεων, δόθηκαν διευκρινίσεις, ώστε οι ομάδες να μπορέσουν να προχωρήσουν, ωστόσο, η καθοδήγηση του διδάσκοντα δεν προχώρησε σε αναφορές στο πρόσημο της διακρίνουσας και του γινομένου των ριζών.

Ακολούθησε η προγραμματιστική - αλγοριθμική δραστηριότητα (δραστηριότητα 3), όπου ζητήθηκε να διαβάζονται ως δεδομένα εισόδου το μήκος της ημιδιαδρομής, η επιθυμητή διάρκεια, και η ταχύτητα του ρεύματος, από τα οποία να υπολογίζεται η αναγκαία ταχύτητα του σκάφους. Χωρίς να υποδειχθεί ρητά ότι η λύση δεν απαιτεί δομή επιλογής, προφορικά τονίστηκε ότι μια δομή επιλογής παύει να είναι αναγκαία όταν η συνθήκη που ελέγχει, έχει πάντοτε σταθερή τιμή.

Στους μαθητές της Γ΄ Τάξης, για τους οποίους παραλήφθηκε η δραστηριότητα της παραμετροποίησης, ζητήθηκε επιπλέον να τροποποιήσουν τον κώδικά τους, και να κατασκευάσουν υποπρόγραμμα που να επιστρέφει την απαιτούμενη ταχύτητα βάσει των τριών δεδομένων εισόδου που θα περνούν σε αυτό ως ορίσματα.

3.2 Αποτελέσματα της δραστηριότητας

Στην Α΄ Τάξη, για την ολοκλήρωση της λύσης του αριθμητικού στιγμιότυπου και τη συζήτηση των ερωτημάτων κατανόησης, 3 από τα 11 ζευγάρια χρειάστηκαν βοήθεια, το ένα από αυτά μεγαλύτερη. Στη γενίκευση του στιγμιότυπου, 6 ζευγάρια

ISBN:978-960-578-072-2

χρειάστηκαν βοήθεια, τα 3 από αυτά μεγαλύτερη. Οι μαθηματικοί του σχολείου σε σχετική συζήτηση ανέφεραν ότι μέχρι την τάξη αυτή δεν αφιερώνεται ικανός χρόνος για τη δεξιότητα αυτή, ενώ, παρεμπιπτόντως, τονίστηκε ότι ο όρος Αλγόριθμος γενικά απουσιάζει από τα σχολικά βιβλία, πλην της Πληροφορικής . Τα 10 από τα 11 ζευγάρια ολοκλήρωσαν ορθά το ζητούμενο πρόγραμμα, τα δύο από αυτά με μερική βοήθεια, κυρίως συντακτική. Όλοι, ωστόσο, χρησιμοποίησαν δομή επιλογής, βάσει της τιμής της διακρίνουσας. Μάλιστα, μερικοί σε προηγούμενο ερώτημα είχαν αποκλείσει τη δυνατότητα δύο ή καμίας λύσης, ως μη λογικές! Όπως φαίνεται στην εικόνα 4, κάποιες ομάδες εφάρμοσαν τη μεταφορά ιδεών και την επαναχρησιμοποίηση κώδικα, αξιοποιώντας προηγούμενο κώδικά τους για τη δευτεροβάθμια εξίσωση, αντιστοιχίζοντας κατάλληλα στους συντελεστές της τις παραμέτρους του προβλήματος. Έτσι, όμως, απέτυχαν να διακρίνουν ότι η if-elif-else δεν είναι αναγκαία, καθώς η διακρίνουσα είναι θετική, και οι ρίζες ετερόσημες.

Πίνακας 1. *Μερικά αποτελέσματα των (υπο)δραστηριοτήτων*

Τάξη	Χώρος / αποτέλεσμα	Δραστηριότητα 1		Δραστηριότητα 2		Δραστηριότητα 3			
		αυτόνομα	βοήθεια	αυτόνομα	βοήθεια	ακολουθία	επιλογή	βοήθεια	υποπρ
Α΄ (11ζεύγη)	Εργαστήριο	8	3 (1)	5	6 (3)	0	8	2	-
Β΄ (12ζεύγη)	Αίθουσα	7	5 (2)	4	8 (4)	1	6	4 (2)	-
Γ΄ (10άτομα)	Εξ αποστάσεως	10	0	-	-	3	7	0	3

Αντίθετα με το τμήμα της Α΄ Τάξης που είχε μαθητές που συνειδητά είχαν επιλέξει το μάθημα προγραμματισμού, αυτό της Β΄ Τάξης είχε λιγότερη ομοιογένεια, με μαθητές διαφορετικών κλίσεων και ενδιαφερόντων, και με μάθημα μία μόλις ώρα την εβδομάδα. Στη σχετική γραμμή του πίνακα 1 φαίνεται ότι το τμήμα της Β΄ Τάξης χρειάστηκε περισσότερη βοήθεια σε όλες τις φάσεις, ενώ ένα ζευγάρι κατόρθωσε να μετασχηματίσει τη γνώση που κατέκτησε στις δύο πρώτες φάσεις στον κώδικα μίας γραμμής για το αποτέλεσμα από την παράσταση 5.

Στο τμήμα αυτό αναδείχθηκαν σύνθετα εμπόδια που συναντώνται σε αρχάριους της αλγοριθμικής (Γεωργιάδης, 2017) όταν καλούνται να δημιουργήσουν από την αρχή, ή, εν προκειμένω, να μεταφέρουν έτοιμο από κάποιο άλλο πεδίο, έναν αλγόριθμο. Αφενός, αρκετοί θεωρούν τις μεταβλητές ως «αγνώστους» σε εξισώσεις, υπό το πρίσμα των μαθηματικών. Τέτοιες δυσκολίες που αφορούν μεταβλητές και εκχώρηση τιμών σε αυτές έχουν μελετηθεί διεξοδικά (Κόμης, 2005, Γρηγοριάδου, 2009). Αφετέρου, το μετα-πρόβλημα (Μαμονά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017) του αναστοχασμού της επίλυσης του στιγμιότυπου και του μετασχηματισμού του σε αλγόριθμο αποτελεί μία μη τετριμμένη διαδικασία, και απαιτεί ένα νοητικό άλμα, με δυσκολίες για αρκετούς, ακόμη και κάποιους από αυτούς που λύνουν με ευχέρεια αυξημένης δυσκολίας προβλήματα. Μία επιπλέον δυσκολία σχετίζεται με την πρόσληψη της έννοιας των δεδομένων. Ενώ σε προβλήματα άλλων γνωστικών πεδίων ο μαθητής ταυτίζει τα δεδομένα με τις αριθμητικές ποσότητες της εκφώνησης, εδώ, στη φάση του μεταπροβλήματος, η είσοδος δεδομένων, ή η απόδοση τιμών σε αυτά, πρέπει να αποτελέσει διακριτό βήμα, και παρουσιάζεται αμηχανία σε αρκετούς

ISBN:978-960-578-072-2

μαθητές, καθώς πλέον τα δεδομένα γίνονται μεταβλητές, διαφορετικά από αυτό που εκείνοι θεωρούσαν ως δεδομένα. Τέλος, δεν είναι αμελητέο το εμπόδιο της τελικής κωδικοποίησης, εν προκειμένω σε Ψευδογλώσσα, με την τήρηση των γραμματικών κανόνων της. Η κατά κανόνα μικρή τριβή του μαθητή με τη συγγραφή κώδικα πρέπει να είναι πάντοτε στο μυαλό του διδάσκοντα και να μην συγχέεται με την εξοικείωση του μαθητή με την τεχνολογία γενικότερα και τις Τ.Π.Ε. ειδικότερα.

```python
# Θεωρούμε ότι τα τα 3 δεδομένα είναι θετικοί
dist = float(input("Ημιδιαδρομή (χλμ): "))
dur  = float(input("Διάρκεια      (ω): "))
curr = float(input("Ρεύμα     (χλμ/ω): "))
# έχουμε το τριώνυμο ax²+bx+c=0 με
a = dur
b = -2*dist
c = -dur*curr**2
d = b**2-4*a*c
if d < 0:
  print("Το πλοίο δεν μπορεί να πλεύσει")
elif d == 0:
  x = -b/(2*a)
  print(f"Ταχύτητα: {x:.2f} χλμ/ω")
else:
  x = (-b+d**0.5)/(2*a)
  if x > 0: print(f"Ταχύτητα: {x:.2f} χλμ/ω")
  x = (-b-d**0.5)/(2*a)
  if x > 0: print(f"Ταχύτητα: {x:.2f} χλμ/ω")
```

```
δι <- 4*δ^2 + 4*τ^2*ρ^2
Αν δι < 0 τότε
  Εμφάνισε "Το πλοίο δεν μπορεί να πλεύσει"
αλλιώς_αν δι = 0 τότε
  χ <- 2*δ/τ
  Εμφάνισε "Σταθερή Ταχύτητα (km/h): ", χ
αλλιώς
  χ <- (2*δ + δι^0.5)/(2*τ)
  Αν χ > 0 τότε
    Εμφάνισε "Σταθερή Ταχύτητα (km/h): ", χ
  Τέλος_αν
  χ <- (2*δ - δι^0.5)/(2*τ)
  Αν χ > 0 τότε
    Εμφάνισε "Σταθερή Ταχύτητα (km/h): ", χ
  Τέλος_αν
Τέλος_αν
```

```
x=(dist+(dist**2+dur**2*curr*2)**0.5)/dur
```

```
χ <- (δ + (δ^2 + τ^2*ρ^2)^0.5)/τ
```

Εικόνα 4. *Κώδικας από την αλγοριθμική - προγραμματιστική προσέγγιση*

Στο τμήμα της Γ΄ Τάξης ένα επιπλέον ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αποτέλεσε η προαιρετική συμμετοχή των μαθητών στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση επείγοντος χαρακτήρα (Hodges, et al, 2020) που αντικατέστησε απροετοίμαστα για όλους τη διά ζώσης. Έτσι κατά τεκμήριο και οι 10 συμμετέχοντες ήταν μαθητές με ενδιαφέρον για το μάθημα, σε προχωρημένο στάδιο προετοιμασίας για τις πανελλαδικές εξετάσεις που έπονταν. Όλοι ανταποκρίθηκαν θετικά και με ευχέρεια στο νέο περιβάλλον, που δεν αποτέλεσε εμπόδιο για τη δραστηριότητα, χωρίς αυτή η εκτίμηση να αποτελεί βεβαιότητα για τον διδάσκοντα. Το πέρασμα από το στιγμιότυπο στο πρόγραμμα δεν είχε ιδιαίτερη δυσκολία (βλέπε πίνακα 1), όμως και πάλι η πλειονότητα (7 στους 10) ακολούθησε τα τυφλά βήματα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, με έλεγχο της διακρίνουσας, ενώ ήταν σαφές ότι μία ήταν η ζητούμενη τιμή, και υπήρχε πάντοτε. Οι 3 που ανέλυσαν ορθά το πρόβλημα και κατέληξαν στη σχέση 5 (προ απλοποιήσεων οι 2), την αντιστοίχισαν εύκολα στην κατάλληλη έκφραση και υλοποίησαν τη ζητούμενη απλή συνάρτηση (εικόνα 4). Για τους υπόλοιπους αυτό αποτέλεσε τροχοπέδη, καθώς κινήθηκαν στη λύση της επιστροφής μέχρι μίας ή δύο ριζών ή του λεκτικού της αδύνατης περίπτωσης, επιλέγοντας την κατασκευή διαδικασίας και της κωδικοποίησης πολλαπλών ελέγχων, συμπεριλαμβανομένων και αυτών για το πρόσημο των ριζών.

ISBN:978-960-578-072-2

Η συζήτηση που ακολούθησε, εύλογα έθεσε το εξής ζήτημα: μπορεί ένα τέτοιο θέμα να τεθεί στις πανελλήνιες, πολλώ δε μάλλον όταν σε αυτές δεν ζητείται ο βέλτιστος, υπό οποιαδήποτε κριτήρια, κώδικας ή αλγόριθμος, αλλά ένας ορθός κώδικας ή αλγόριθμος για ένα πρόβλημα. Η απάντηση στον προβληματισμό αυτό βρίσκεται στη διατύπωση της εκφώνησης. Αν ζητείται ρητά η κατασκευή συνάρτησης, ο εξεταζόμενος υποχρεωτικά πρέπει να οδηγηθεί με τον ένα ή άλλο τρόπο στην επιστροφή μίας μοναδικής τιμής από αυτήν, αιτιολογώντας την απάντησή του. Βεβαίως, όλα τα θέματα που αφορούν προβλήματα των προηγούμενων χρόνων, αποφεύγουν να ζητούν αιτιολογήσεις για τις επιλογές των υποψηφίων, καθώς δεν αξιολογείται σε αυτές η καλλιέργεια και το επίπεδο ανάπτυξης της Υπολογιστικής Σκέψης.

4. Επεκτάσεις - Σύνοψη

Το πρόβλημα που διαπραγματευτήκαμε στα προηγούμενα αποτέλεσε αφορμή για τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν και άλλες διαφορετικές τεχνικές και εργαλεία Υπολογιστικής Σκέψης. Σε Υπολογιστικά Φύλλα έγινε η γνωριμία με το εργαλείο της Αναζήτησης Στόχου (Goal Seek), με εισαγωγή των τριών 3 δεδομένων σε αντίστοιχα κελιά, και της αντίστοιχης φόρμουλας της παράστασης 2 σε ένα τέταρτο, που αποτέλεσε το κελί στόχο. Δόθηκε η ευκαιρία να συζητηθεί ότι χρησιμοποιούνται στην ουσία επαναληπτικές δοκιμές διαφορετικών τιμών του κελιού της απάντησης μέχρι να προσεγγιστεί ικανοποιητικά ο στόχος, κάτι που για τη Β΄ Τάξη αποτέλεσε μια πρώτη επαφή με τη δομή της επανάληψης, και στη Γ΄ μια ευκαιρία για την προγραμματιστική λύση του προβλήματος με τον τρόπο αυτό. Ακόμη, στα τμήματα της Α΄ και Β΄ Τάξης, έγινε μια γνωριμία με την επιγραμμική υπηρεσία Wolfram Alpha, στην οποία δημιουργήθηκε μία μικροεφαρμογή-widget (Wolfram Alpha Widgets, 2020) για την κατασκευή της γραφικής παράστασης της απαιτούμενης ταχύτητας του σκάφους στο νερό συναρτήσει της ταχύτητας του ρεύματος, εισάγοντας τιμές για τις δύο άλλες παραμέτρους (από εκεί η εικόνα 3).

Συνοψίζοντας, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές στις συγκεκριμένες τάξεις δυσκολεύτηκαν αρκετά να κάνουν το άλμα από το στιγμιότυπο στη γενικότητα, να κατακτήσουν την έννοια των δεδομένων εισόδου και των ζητούμενων, όταν είναι σε εισαγωγικό επίπεδο Αλγοριθμικής, καθώς και να μετουσιώσουν γνώσεις από το πεδίο της Άλγεβρας σε Υπολογιστική Σκέψη και συνεκδοχικά σε αλγόριθμο. Παρόλο που κινητοποιήθηκε σχεδόν το σύνολο των μαθητών, αρκετοί δυσανασχέτησαν από τα «πολλά μαθηματικά», ίσως και γιατί ήταν ασύμβατη η προηγούμενη εμπειρία τους, αφενός στο γυμνάσιο με προγραμματισμό με πλακίδια και παιγνιώδη τρόπο, αφετέρου στο λύκειο με εισαγωγικές ασκήσεις στο βασικό μοτίβο που περιγράφηκε στην εισαγωγή.

Σε επόμενο βήμα, σκοπεύουμε να πραγματοποιήσουμε παρόμοια δραστηριότητα σε συνδιδασκαλία με τον διδάσκοντα της Άλγεβρας και προσομοίωση της πλεύσης στο

ISBN:978-960-578-072-2

λογισμικό GeoGebra (geogebra.org, 2020), με κατάλληλους ρυθμιστές (sliders) για την επιθυμητή διάρκεια και την ταχύτητα του ρεύματος.

Αναφορές

Hodges C., Moore S., Lockee B., Trust T. and Bond A. (2020). The difference between Emergency Remote Teaching and Online Learning. *EDUCAUSE review*. Ανάκτηση από το https://er.educause.edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning

Schunk, D. H. (2011). *Learning Theories: An Educational Perspective, 6th Ed.* Addison Wesley.

Vygotsky, L.S. (1997). *Νους στην κοινωνία: Η ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών διαδικασιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*. 49, no 3, 33-35.

Wing, J. (2014). Computational Thinking Benefits Society. *40th Anniversary Blog of Social Issues in Computing.* Ανάκτηση από το http://socialissues.cs.toronto.edu/index.html %3Fp=279.html

Γεωργιάδης, Π. (2016). Επαναληπτικές Δομές με το παράδειγμα της Φαρμακευτικής Αγωγής και της Εκθετικής Απόσβεσης. *8th Conference on Informatics in Education - Η πληροφορική στην Εκπαίδευση (8th CIE2016)*, Πειραιάς.

Γεωργιάδης, Π. (2017). Αρχή με επανάληψη - Εισαγωγή σε μια προσέγγιση top - down στη διδασκαλία του προγραμματισμού. *9h Conference on Informatics in Education - Η πληροφορική στην Εκπαίδευση (9th CIE2017)*, Πειραιάς.

Γρηγοριάδου, Μ. κ.α. (2009). *Διδακτικές Προσεγγίσεις και Εργαλεία για τη διδασκαλία της Πληροφορικής*. Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Κόμης, Β. (2005). *Εισαγωγή στη Διδακτική της Πληροφορικής*. Αθήνα: Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Μαμονά-Downs, Γ. & Παπαδόπουλος, Ι. (2017) Επίλυση προβλήματος στα Μαθηματικά. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

geogebra.org (2020). *GeoGebra | Free Math Apps* - https://www.geogebra.org/

MathIsFun.com (2019). *Real World Examples of Quadratic Equations* - https://www.mathsisfun.com/algebra/quadratic-equation-real-world.html

Thonny.org (2019). *A Python IDE for Learning Programming.* Ανάκτηση από το https://thonny.org/

ISBN:978-960-578-072-2

Wolfram Alpha Widgets (2020). *River cruise.* https://www.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp?id=52d0b884be08ce9b411fb4f9a18c0728

Γεωργόπουλος, Α. (2011). *Ο Διερμηνευτής της ΓΛΩΣΣΑΣ για την «Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον» (ΑΕΠΠ).* Ανάκτηση από το http://alkisg.mysch.gr/

ΠΣΔ (2020) *Ζωντανά ηλεκτρονικά μαθήματα.* Πρόσβαση στο http://lessons.sch.gr/

Abstract

We describe the utilization of an elementary kinematics problem in three different upper K12 classes, for which students are asked to develop an algorithm, program or subprogram to solve it, applying prior Physics and Algebra knowledge and competences. While solving any problem instance was relatively easy, the leap from there to the parametric form, in terms of the algebraic analytical approach, and to the form of input data or subroutine parameters in the light of computational thinking, exposed difficulties in all three audiences. Induction from particular cases to the general case, pattern recognition, knowledge and idea transfer and application from one field to another, skills included in Computational Thinking, seemed to be acquired to varying degrees, despite the presumed adequacy of the necessary cognitive background and in the absence of any complexity.

Keywords: computational thinking, interdisciplinary approach, problem solving learning, quadratic equation, upper K12.