Τοποθέτηση Κλασμάτων στην Αριθμογραμμή με Κίνητρο την Επίλυση Γρίφου - Διδακτικό Σενάριο σε GeoGebra

Δέσποινα Ρηνιού

Εκπαιδευτικός ΠΕ03, 2ο Γυμνάσιο Παλαιού Φαλήρου, driniou@gmail.com

Περίληψη

Στο άρθρο περιγράφεται ένα διδακτικό σενάριο με στόχο να αντιληφθούν οι μαθητές ότι στα κλάσματα δεν υπάρχει προηγούμενος και επόμενος σε αντίθεση με τους φυσικούς αριθμούς. Επιδιώκεται ένα βήμα προς την κατανόηση της πυκνότητας των ρητών που σύμφωνα με τη βιβλιογραφία είναι μια αργή και χρονοβόρα διαδικασία. Οι μαθητές, ανά δύο σε έναν Η/Υ, τοποθετούν 25 ετερώνυμα κλάσματα, γνήσια και μη γνήσια στην ίδια αριθμογραμμή ενός αρχείου GeoGebra ώστε να τα διατάξουν σε αύξουσα σειρά χωρίς να τα μετατρέψουν σε ομώνυμα ή δεκαδικούς, πράγμα που καθιστά αναγκαία τη χρήση της τεχνολογίας. Η διάταξη των κλασμάτων χρησιμοποιείται για την επίλυση γρίφου σε φύλλο Α4. Οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου στους οποίους εφαρμόστηκε το σενάριο έλυσαν το γρίφο με ενθουσιασμό και διαπραγματεύτηκαν σημαντικές έννοιες τοποθετώντας τα κλάσματα στην αριθμογραμμή.

Λέξεις κλειδιά: ΤΠΕ, κλάσματα, αριθμογραμμή, διάταξη, GeoGebra, πυκνότητα ρητών

1. Εισαγωγή

Αφορμή για τη δημιουργία του διδακτικού σεναρίου που περιγράφεται στο άρθρο αποτέλεσε η οδηγία του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής για το σχολικό έτος 2013-14 (ΠΣΔ, 2013), σύμφωνα με την οποία στα μαθηματικά της Α΄ Γυμνασίου πρέπει να δοθεί έμφαση σε δραστηριότητες οι οποίες έμμεσα δείχνουν την έννοια της πυκνότητας των ρητών. Επιδιώχθηκε να σχεδιαστεί μια δραστηριότητα – γρίφος που θα κινητοποιούσε τα παιδιά να ασχοληθούν με αυτήν και παράλληλα να τα βοηθήσει να συνειδητοποιήσουν ότι τα κλάσματα σε αντίθεση με τους φυσικούς αριθμούς δεν έχουν προηγούμενο ούτε επόμενο. Μετά από μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με τα κίνητρα μάθησης, τα χαρακτηριστικά μιας δραστηριότητας που έχει νόημα για τους μαθητές, τις δυσκολίες των μαθητών περνώντας από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς καθώς και τις δραστηριότητες του αναλυτικού προγράμματος σε δημοτικό και γυμνάσιο, επιλέχθηκε ένας κλασικός γρίφος ως κεντρική ιδέα του σεναρίου. Δίνονται κουκίδες αριθμημένες με φυσικούς αριθμούς και πρέπει να

ISBN: 978-960-578-045-6

συνδεθούν ακολουθώντας τους αριθμούς με αύξουσα σειρά ώστε να σχηματιστεί μια εικόνα. Ένας τέτοιος γρίφος δίνεται στα παιδιά στο τελευταίο δεκάλεπτο μιας διδακτικής περιόδου ως διασκεδαστικός επίλογος του μαθήματος της ημέρας για να προετοιμαστούν για το επόμενο μάθημα όπου θα τους δοθεί προς επίλυση για μια διδακτική περίοδο ένας όμοιος γρίφος με κλάσματα στη θέση των φυσικών αριθμών. Για τη διάταξη των 25 κλασμάτων χρησιμοποιείται ένα αρχείο GeoGebra με μια αριθμογραμμή στην οποία οι μαθητές τοποθετούν τα κλάσματα.

Το σενάριο προσθέτει κάτι που δεν υπάρχει στις δραστηριότητες των σχολικών βιβλίων δημοτικού και γυμνασίου: την τοποθέτηση αρκετών ετερώνυμων κλασμάτων γνήσιων και μη γνήσιων στην ίδια αριθμογραμμή χωρίς να τα μετατρέπουν σε ομώνυμα ή δεκαδικούς και σε αυτό είναι απαραίτητη η χρήση της τεχνολογίας.

Στο άρθρο αρχικά περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο της κατασκευής του σεναρίου, στη συνέχεια παρουσιάζεται το σενάριο, ακολουθεί η αξιολόγησή του βασισμένη στις παρατηρήσεις που κατέγραψαν οι εκπαιδευτικοί που το εφάρμοσαν και στο τέλος διατυπώνονται προτάσεις για αξιοποίηση του σεναρίου σε ερευνητικές εργασίες.

2. Θεωρητικό πλαίσιο

2.1 Κίνητρα μαθητών

Η πρώτη σκέψη στην κατασκευή του σεναρίου ήταν να βρεθεί μια δραστηριότητα η οποία θα κινητοποιούσε τα παιδιά και θα είχε νόημα να ασχοληθούν με αυτήν. Έγινε μια προσπάθεια να υιοθετηθούν οι απόψεις των Malone and Lepper, (1987) σύμφωνα με τους οποίους υπάρχουν τέσσερα είδη εσωτερικών κινήτρων (intrinsic motivations): πρόκληση (challenge), περιέργεια (curiosity), έλεγχος (control), φαντασία (fantasy). Επιπλέον επιδιώχθηκε η δραστηριότητα να έχει σκοπό (purpose) και χρησιμότητα (utility) όπως προτείνουν οι Ainley, Pratt, and Hanseb (2006). Υποστηρίζουν ότι μια δραστηριότητα έχει «σκοπό» όχι όταν επιλύει ένα πραγματικό πρόβλημα εκτός σχολείου αλλά όταν παράγεται ένα αποτέλεσμα που έχει νόημα για το μαθητή. Μια δραστηριότητα είναι «χρήσιμη» όταν αποσκοπεί όχι μόνο στην ικανότητα να ολοκληρώνονται διαδικασίες αλλά στο να κατασκευάζει ο μαθητής νόημα για τους τρόπους με τους οποίους χρησιμοποιούνται οι μαθηματικές ιδέες.

2.2 Δυσκολίες στο πέρασμα από τους φυσικούς στους ρητούς

Ο αρχικός στόχος του σεναρίου ήταν να αντιληφθούν οι μαθητές μία από τις διαφορές μεταξύ φυσικών και ρητών αριθμών: ότι οι ρητοί αριθμοί σε αντίθεση με τους φυσικούς αριθμούς δεν έχουν προηγούμενο και επόμενο. Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004) έδειξε ότι η κατανόηση της πυκνότητας είναι μια αργή και σταδιακή διαδικασία η οποία διακατέχεται από την διακριτότητα των φυσικών. Στη συγκεκριμένη έρευνα πήραν μέρος εθελοντικά 16 μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Γυμνασίου της Αθήνας και τους τέθηκαν μεταξύ άλλων

ISBN: 978-960-578-045-6

ερωτήματα σχετικά με την πυκνότητα των ρητών. Είχε προηγηθεί με τον καθηγητή τους μια επανάληψη σε όλα όσα θα έπρεπε να γνωρίζουν για τους πραγματικούς αριθμούς και είχαν χρησιμοποιήσει την αριθμογραμμή για να αναπαριστούν τους πραγματικούς αριθμούς. Σε προσωπικές συνεντεύξεις που διαρκούσαν μία ώρα ανά μαθητή ζητήθηκε να απαντήσουν αν μεταξύ δύο συγκεκριμένων αριθμών υπάρχει μόνο ένας αριθμός, κανένας ή αν συμβαίνει κάτι άλλο. Κανείς δεν απάντησε με ευχέρεια ότι μεταξύ δύο ρητών υπάρχουν άπειροι ρητοί. Μερικές ενδεικτικές απαντήσεις ήταν οι εξής: «Δεν υπάρχει κανένας αριθμός μεταξύ 0,005 και 0,006 γιατί μετά το 0,005 είναι το 0,006». «Μεταξύ 3/8 και 5/8 υπάρχει μόνο το 4/8». «Επειδή το 0,01 είναι το ίδιο με το 0,010 μεταξύ τους υπάρχουν οι αριθμοί 0,02 μέχρι 0,09». «Μεταξύ των 0,05 και 0,06 υπάρχουν οι αριθμοί 0,051, 0,052, …., 0,059». «Μεταξύ 3/8 και 5/8 είναι όσοι και οι αριθμοί μεταξύ 3 και 5 δηλαδή 3,1, 3,2, 3,3, ….., 3,9». «Υπάρχουν πεπερασμένο πλήθος αριθμών μεταξύ 0,05 και 0,06 όταν είναι σε δεκαδική μορφή αλλά άπειρο πλήθος όταν μετατραπούν σε κλάσματα». Οι παρανοήσεις των μαθητών μπορούν να επεξηγηθούν με τη θεωρία των συνθετικών μοντέλων (Vosniadou, 1994b), δηλαδή μεταφέρουν εσφαλμένα στους ρητούς αριθμούς την έννοια του προηγούμενου και του επόμενου αριθμού που υπάρχει στους φυσικούς αριθμούς. Αυτό σημαίνει ότι η κατανόηση της πυκνότητας απαιτεί αναδιοργάνωση της προηγούμενης γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς επομένως απαιτείται εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou, 1994b) η οποία είναι χρονοβόρα και αργή (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Επομένως ο στόχος της δραστηριότητας του παρόντος σεναρίου είναι να κάνουν οι μαθητές ένα βήμα προς την κατεύθυνση αυτής της εννοιολογικής αλλαγής.

Κατά τη διάρκεια των σχολικών ετών 2001-2003 έγινε μια έρευνα στο πανεπιστήμιο Turku της Φινλανδίας (Hannula, Maijala, Pehkonen, & Soro, 2006), διάρκειας δύο ετών, για την εξέλιξη της κατανόησης και της αυτοπεποίθησης στα Μαθηματικά μαθητών μεταξύ της 5ης και της 7ης τάξης του Φινλανδικού σχολείου. Μεταξύ των ερωτημάτων που δόθηκαν σε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα μαθητών από όλη τη χώρα (1.154 μαθητές ηλικίας 11-12 ετών και 1.902 μαθητές ηλικίας 13-14 ετών) ζητήθηκε ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός, ζητήθηκε να βρεθεί πόσοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 0.8 και 1.1 καθώς και ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που είναι μικρότερος του 1. Το 20% των μαθητών της 5ης τάξης έδειξαν κάποιο είδος κατανόησης για την απειρία των φυσικών αριθμών ενώ ελάχιστοι έδειξαν κάποια κατανόηση για την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Η εικόνα δεν ήταν πολύ καλύτερη στα παιδιά της 7ης τάξης αλλά παρατηρήθηκε μια εξέλιξη από την 5η στην 7η τάξη. Οι μαθητές κατανοούν ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι νωρίτερα από το ότι τα υποσύνολα των ρητών αριθμών περιέχουν άπειρους αριθμούς. Επίσης κατανοούν νωρίτερα μια έννοια του απείρου απαντώντας για παράδειγμα ότι ο μεγαλύτερος αριθμός μικρότερος του 1 είναι ο 0,99999 από το ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός. Αναλύοντας στοιχεία της ίδιας έρευνας οι Hannula, Maijala, and Pehkonen (2004) συμπέραναν ότι η ικανότητα του μαθητή να αντιλαμβάνεται το

ISBN: 978-960-578-045-6

κλάσμα ως αριθμό πάνω στην αριθμογραμμή προβλέπει τη μελλοντική του κατανόηση στην πυκνότητα της αριθμογραμμής, γι’ αυτό θεωρούν την αριθμογραμμή σημαντικό εργαλείο κατανόησης.

2.3 Αναλυτικό πρόγραμμα – Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή

Στα σχολικά βιβλία Δ΄ Δημοτικού – Α΄ Γυμνασίου (Βαμβακούση, Καργιωτάκης, Μπομποτίνου, & Σαΐτης, 2009; Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης, & Φερεντίνος, 2013; Θεοδώρου, Λεμονίδης, Νικολαντωνάκης, Παπαδάκος, & Σπανακά, 2009; Κακαδιάρης, Μπελίτσου, Στεφανίδης, & Χρονοπούλου, 2009; Κασσώτη, Κλιάπης, & Βρυώνης, 2009) υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες ζητείται η τοποθέτηση αρκετών κλασμάτων στην ίδια αριθμογραμμή, η παρεμβολή κλάσματος ανάμεσα σε δύο κλάσματα και η τοποθέτηση ενός κλάσματος στην αριθμογραμμή. Για να τοποθετήσει ο μαθητής αρκετά ετερώνυμα κλάσματα στην ίδια αριθμογραμμή θα πρέπει να τα μετατρέψει σε ομώνυμα ή σε δεκαδικούς, διαφορετικά δεν είναι πρακτικά εύκολο να γίνει η τοποθέτηση. Στο παρόν σενάριο η τεχνολογία δίνει τη δυνατότητα να τοποθετηθούν με ευκολία αρκετά τυχαία κλάσματα στην αριθμογραμμή χωρίς μετατροπή σε ομώνυμα ή δεκαδικούς. Έτσι ο μαθητής καταλήγει σε μια εικόνα με αρκετά ετερώνυμα κλάσματα διατεταγμένα στην αριθμογραμμή τα οποία είναι στην αρχική τους μορφή, μια διαφορετική αναπαράσταση από αυτές που έχει συνηθίσει.

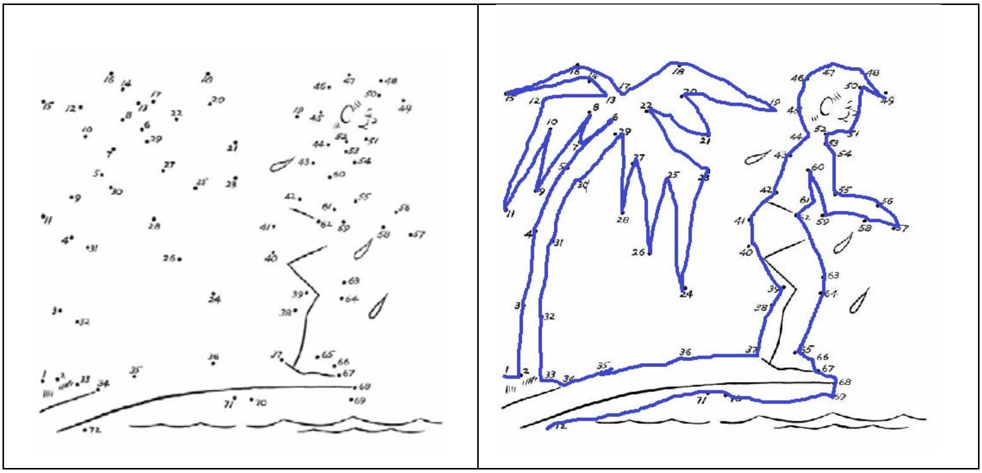
2.4 Το GeoGebra ως εργαλείο στη διδασκαλία

Το GeoGebra δημιουργήθηκε από τον Markus Hohenwarter το 2001, ως μέρος της μεταπτυχιακής εργασίας του για το Μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Μαθηματικά της Εκπαίδευσης και της Επιστήμης των Υπολογιστών» στο Πανεπιστήμιο του Σάλτσμπουργκ της Αυστρίας. Κέρδισε πολλά διεθνή βραβεία και μεταφράστηκε από εκπαιδευτές και καθηγητές μαθηματικών από όλο τον κόσμο σε περισσότερες από 25 γλώσσες (Hohenwarter & Preiner, 2007) Είναι ένα ελεύθερο λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας (Dynamic Geometry Software – DGS) και ταυτόχρονα υποστηρίζει τα βασικά χαρακτηριστικά ενός Computer Algebra System (CAS). Επομένως αποτελεί ένα Δυναμικό Μαθηματικό Λογισμικό (Dynamic Mathemetics Software – DMS) για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, της άλγεβρας και της ανάλυσης. Επιλέχθηκε για το σχεδιασμό του συγκεκριμένου σεναρίου επειδή δίνει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να σχεδιάζει με σχετική ευκολία, λόγω της φιλικότητάς του, δραστηριότητες στις οποίες ο μαθητής μεταφέρεται εύκολα από την αλγεβρική στη γεωμετρική αναπαράσταση ενός μαθηματικού αντικειμένου και αντίστροφα. Για παράδειγμα, στο συγκεκριμένο σενάριο δίνονται στους μαθητές κλάσματα (αριθμοί) τα οποία πρέπει να διατάξουν και μεταφέρονται στην αναπαράστασή τους ως σημεία πάνω σε μια ευθεία.

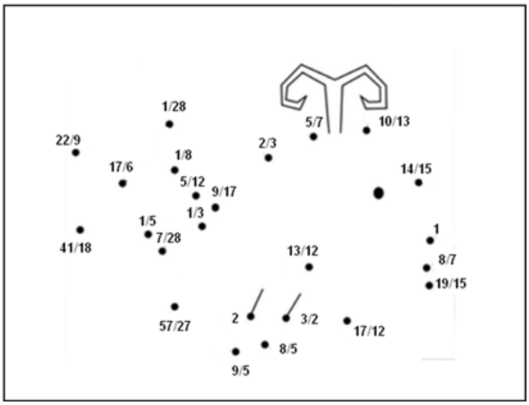
ISBN: 978-960-578-045-6

3. Περιγραφή του σεναρίου

Για την εφαρμογή του σεναρίου απαιτείται μια διδακτική περίοδος και ένα δεκάλεπτο από το μάθημα της προηγούμενης μέρας. Κατά τη διάρκεια αυτού του δεκάλεπτου δίνεται ένα φύλλο Α4 όπως φαίνεται αριστερά στην εικόνα 1 και ζητείται από τα παιδιά να συνδέσουν με μολύβι τις κουκίδες ακολουθώντας τους φυσικούς αριθμούς από το 1 έως το 72 ώστε να προκύψει αυτό που φαίνεται δεξιά στην εικόνα 1. Τέτοιες δραστηριότητες προσφέρονται δωρεάν στο διαδίκτυο αν αναζητήσει κανείς dot-to-dot free worksheets. Η δραστηριότητα δίνεται στους μαθητές ως ένας διασκεδαστικός επίλογος για το μάθημα εκείνης της ημέρας.



Εικόνα 1. *Ο γρίφος με τους φυσικούς αριθμούς πριν και μετά την επίλυσή του.*



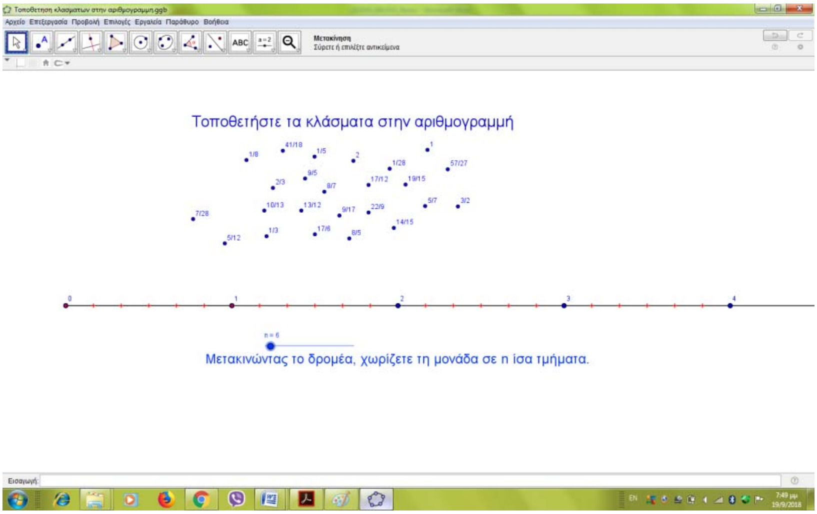
Εικόνα 2. *Ο γρίφος με τα κλάσματα όπως δίνεται στους μαθητές.*

Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός κρατώντας στα χέρια του ένα φύλλο Α4 όπως αυτό στην Εικόνα 2, με κλάσματα δίπλα στις κουκίδες αντί για φυσικούς αριθμούς, ρωτάει

ISBN: 978-960-578-045-6

τα παιδιά αν είναι το ίδιο εύκολο να συνδεθούν οι κουκίδες από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο κλάσμα. Γίνεται συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης και ζητούνται προτάσεις για την επίλυση του γρίφου. Αναμένεται να συζητηθεί το γεγονός ότι τα κλάσματα δεν έχουν προηγούμενο ούτε επόμενο. Στη συνέχεια ανακοινώνεται ότι στο επόμενο μάθημα θα επιλυθεί ο γρίφος στο εργαστήριο Πληροφορικής.

Στο επόμενο μάθημα χρησιμοποιείται το εργαστήριο πληροφορικής στο οποίο κάθονται δύο μαθητές ανά έναν Η/Υ και ανοίγουν το αρχείο GeoGebra όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.



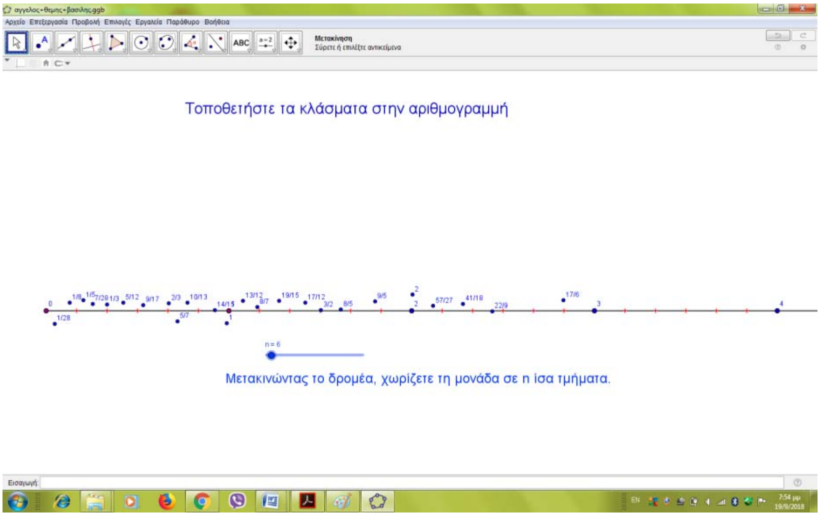
Εικόνα 3. *Το αρχείο GeoGebra με τα κλάσματα προς τοποθέτηση στην αριθμογραμμή.*

Στην οθόνη αυτή βρίσκονται τα 25 κλάσματα της δραστηριότητας της εικόνας 2 και δίπλα στο καθένα μια κουκίδα. Ακριβώς από κάτω υπάρχει η αριθμογραμμή στην οποία πρέπει οι μαθητές να σύρουν και να τοποθετήσουν τις 25 κουκίδες σύμφωνα με το κλάσμα που συνοδεύει κάθε κουκίδα. Κάτω από την αριθμογραμμή υπάρχει ένας δρομέας n που παίρνει τιμές από το σύνολο των φυσικών αριθμών. Ο εκπαιδευτικός επεξηγεί στους μαθητές ότι τα κλάσματα του γρίφου που συζητήθηκε στο τέλος του προηγούμενου μαθήματος βρίσκονται στις οθόνες τους και πρέπει να τοποθετηθούν στην αριθμογραμμή ώστε να διαταχθούν σε αύξουσα σειρά και να μπορέσουν στη συνέχεια να επιλύσουν το γρίφο σε φύλλο Α4. Επεξηγεί ότι σύροντας το δρομέα n χωρίζεται η μονάδα κάθε φορά σε όσα ίσα τμήματα υποδεικνύει η τρέχουσα τιμή του n. Δείχνει ένα παράδειγμα για την τοποθέτηση του κλάσματος 3/12. Σύρει το δρομέα ώστε να πάρει την τιμή 12, χωρίζεται η μονάδα της αριθμογραμμής σε 12 ίσα μέρη και μετρώντας από το μηδέν προς τα δεξιά τρία τμήματα εντοπίζεται η θέση του κλάσματος 3/12. Σύρει στη συνέχεια την κουκίδα που συνοδεύεται από το κλάσμα 3/12 και το τοποθετεί στη θέση αυτή. Στη συνέχεια αφήνονται οι μαθητές να τοποθετήσουν τα υπόλοιπα κλάσματα. Προτείνεται να δίνεται το φύλλο Α4 μόνο

ISBN: 978-960-578-045-6

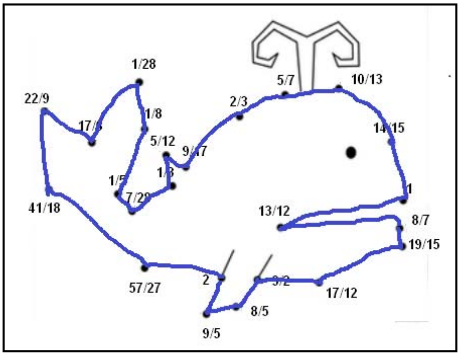
αφού διαταχθούν τα κλάσματα και όχι από την αρχή της διαδικασίας γιατί ενδεχομένως οι μαθητές θα προσπαθήσουν να συνδέσουν τις κουκίδες χωρίς να διατάξουν τα κλάσματα.

Αφού τοποθετηθούν τα 25 κλάσματα στην αριθμογραμμή προκύπτει η Εικόνα 4.



Εικόνα 4. *Η οθόνη GeoGebra αφού τοποθετηθούν τα κλάσματα στην αριθμογραμμή.*

Στη συνέχεια δίνεται σε κάθε μαθητή μια φωτοτυπία του γρίφου της εικόνας 2 και αφού συνδεθούν οι κουκίδες προκύπτει η εικόνα 5.



Εικόνα 5. *Ο γρίφος με τα κλάσματα μετά την επίλυσή του.*

Η χρήση της τεχνολογίας εκτός από απαραίτητη για την τοποθέτηση αρκετών ετερώνυμων κλασμάτων στην ίδια αριθμογραμμή, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί προσφέρει την ευχέρεια στον εκπαιδευτικό κατά το σχεδιασμό της δραστηριότητας να επιλέξει τυχαίους παρονομαστές με σχετικά μεγάλες τιμές. Συνήθως στις δραστηριότητες των σχολικών βιβλίων οι παρονομαστές είναι μικρότεροι του 10 ή

ISBN: 978-960-578-045-6

όταν πρόκειται για αρκετά ετερώνυμα κλάσματα γίνεται επιλογή ώστε να μπορεί να βρεθεί εύκολα το ΕΚΠ των παρονομαστών. Επίσης σκόπιμα επιλέχθηκαν κλάσματα τα οποία δεν ήταν ανάγωγα, κλάσματα που αν απλοποιηθούν προκύπτει φυσικός αριθμός, κλάσματα όπως το 41/18 για να αντιληφθούν οι μαθητές ότι διευκολύνει την τοποθέτησή του η μετατροπή του σε μεικτό. Διαδικασίες όπως η απλοποίηση κλασμάτων, η ισοδυναμία κλασμάτων και η μετατροπή κλάσματος σε μεικτό, αναμένεται να αποκτήσουν ένα επιπλέον νόημα μέσα από τη δραστηριότητα αυτή με κατάλληλη επιλογή κλασμάτων από τον εκπαιδευτικό.

4. Αξιολόγηση του σεναρίου - Επεκτάσεις

Το σενάριο εφαρμόστηκε συνολικά σε έξι τμήματα της Α΄ Τάξης στο 2ο Γυμνάσιο Παλαιού Φαλήρου από δύο εκπαιδευτικούς κατά τη διάρκεια των σχολικών ετών 2015-18. Κάθε τμήμα κατά μέσο όρο είχε 22 μαθητές και μαθήτριες (12-13 ετών) και στο εργαστήριο βρίσκονταν ένας καθηγητής πληροφορικής και ο μαθηματικός του τμήματος. Οι μαθητές έδειξαν ενδιαφέρον και περιέργεια για το αποτέλεσμα των γρίφων και προσπάθησαν να μαντέψουν το αποτέλεσμα.

Η διαδικασία επίλυσης του γρίφου με τους φυσικούς αριθμούς στο προηγούμενο μάθημα είχε διάρκεια περίπου τρία λεπτά και η συζήτηση για την επίλυση του γρίφου με τα κλάσματα είχε διάρκεια περίπου πέντε λεπτά. Στη συζήτηση για το τι είναι αυτό που διαφέρει στην περίπτωση του γρίφου με τα κλάσματα σε σχέση με τον γρίφο με τους φυσικούς αριθμούς οι μαθητές δεν απάντησαν ότι δεν υπάρχει προηγούμενος ή επόμενος στα κλάσματα, απλά θεώρησαν πιο δύσκολη τη διάταξη των κλασμάτων σε σχέση με τη διάταξη των φυσικών και πρότειναν δύο τρόπους για την επίλυση του γρίφου: μετατροπή σε δεκαδικούς και μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα, και οι δύο τρόποι στενά συνυφασμένοι με την έννοια του προηγούμενου που προέρχεται από την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς. Για τη μετατροπή σε δεκαδικούς θα χρειάζονταν όπως είπαν υπολογιστή τσέπης ενώ για τη μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα εγκατέλειψαν την ιδέα όταν είδαν πιο προσεκτικά τους παρονομαστές. Για να συζητηθεί ότι δεν υπάρχει προηγούμενος ή επόμενος στα κλάσματα χρειάστηκε να γίνουν ερωτήματα από τον εκπαιδευτικό όπως για παράδειγμα «Αν βρίσκομαι στο κλάσμα 5/7 σε ποιο κλάσμα πρέπει να πάω αμέσως μετά;», «Γιατί στους φυσικούς ήταν εύκολο να βρεθεί ο επόμενος ενώ τώρα δεν είναι;». Με τέτοια ερωτήματα φάνηκε οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τη διαφορά αυτή μεταξύ φυσικών και κλασμάτων.

Στο εργαστήριο Πληροφορικής, για το άνοιγμα των αρχείων και τις οδηγίες που δόθηκαν στους μαθητές χρειάστηκαν δέκα λεπτά. Για την τοποθέτηση των κλασμάτων στην αριθμογραμμή χρειάστηκαν 20 λεπτά και στη συνέχεια πέντε λεπτά για την επίλυση του γρίφου στο φύλλο Α4. Όσες ομάδες τέλειωναν μπορούσαν να εξερευνήσουν το λογισμικό GeoGebra. Οι οθόνες των μαθητών ελέγχονταν από τον υπολογιστή του εκπαιδευτικού.

ISBN: 978-960-578-045-6

Όλες οι ομάδες κατάφεραν να επιλύσουν το γρίφο και αυτό φάνηκε από τα τελικά σχήματα. Οι εκπαιδευτικοί γυρνούσαν ανάμεσα στους μαθητές και άκουγαν και παρατηρούσαν τον τρόπο που σκέφτονταν. Κατέγραψαν τις παρατηρήσεις τους σύμφωνα με τις οποίες ο ενθουσιασμός των μαθητών ήταν εμφανής από τη στιγμή που μπήκαν στο εργαστήριο για να κάνουν μαθηματικά και όχι πληροφορική, πράγμα που δεν ήταν σύνηθες. Όταν άνοιξαν το αρχείο GeoGebra αρκετοί μαθητές ήταν λίγο διστακτικοί. Ίσως η θέα τόσων κλασμάτων και πολλών διαφορετικών παρονομαστών να μην υποσχόταν κάτι απλό. Όταν ο εκπαιδευτικός έδειξε ένα παράδειγμα τοποθέτησης κλάσματος στην αριθμογραμμή, οι περισσότεροι μαθητές ξεκίνησαν με άνεση τη διαδικασία, ωστόσο περίπου δύο στις δέκα ομάδες εξακολουθούσαν να μην κατανοούν πώς έπρεπε να δουλέψουν. Ο εκπαιδευτικός βοηθούσε αυτές τις ομάδες δείχνοντας και άλλα παραδείγματα. Αρκετά ζεύγη μαθητών ανέπτυξαν εύκολους τρόπους για την τοποθέτηση κάποιων ιδιαίτερων κλασμάτων στην αριθμογραμμή συζητώντας μεταξύ τους. Για παράδειγμα μαθητές καλών επιδόσεων σκέφτηκαν ότι θα διευκόλυνε να απλοποιήσουν κάποια κλάσματα ή στην περίπτωση μη γνήσιων κλασμάτων να τα μετατρέψουν σε μεικτούς. Οι υπόλοιποι μαθητές εργάστηκαν χωρίς ευελιξία στα ιδιαίτερα κλάσματα αλλά αρκετές φορές εκ των υστέρων αντιλαμβάνονταν ότι θα μπορούσαν να δουλέψουν με ευκολότερο τρόπο, πράγμα που θεωρήθηκε σημαντικό.

Το σενάριο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε μια μελλοντική ερευνητική εργασία ώστε να μετρηθεί η επίδρασή του στην κατανόηση των μαθητών σε διάφορα θέματα σχετικά με τα κλάσματα όπως είναι η απλοποίηση, η ισοδυναμία κλασμάτων, οι διαφορετικές μορφές αριθμών (ακέραιος, κλάσμα, δεκαδικός) και η μετατροπή μη γνήσιων κλασμάτων σε μεικτούς αριθμούς. Οι έννοιες αυτές συζητήθηκαν μεταξύ των μαθητών κατά την εφαρμογή του σεναρίου γιατί είχαν επιλεγεί κατάλληλα κλάσματα ώστε να συζητηθούν. Εικάζεται ότι οι μαθητές προχώρησαν ένα βήμα παραπέρα για την κατανόηση αυτών των εννοιών καθώς και της πυκνότητας των ρητών. Με κατάλληλη μεθοδολογία θα μπορούσε να ελεγχθεί αν αυτή η εικασία είναι ορθή.

Αναφορές

Ainley, J., Hanseb, A., & Pratt, D. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23–38.

Hannula, M. S., Maijala, H., & Pehkonen, E. (2004). Development of understanding and self-confidence in mathematics; grades 5-8. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol 3, 17–24. Bergen University College.

ISBN: 978-960-578-045-6

Hannula, M., Maijala, H., Pehkonen, E., & Soro, R. (2006). Infinity of Numbers: How Students Understand It. (2006). In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 345–352. Prague: PME.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. ID 1448, vol. 7, March 2007

Malone, T.W., Lepper, M.R., Making learning fun: A taxonomy of intrinsic motivations for learning. In Aptitude, Learning, and Instruction: III. Conative and Affective Process Analyses; Snow, R.E., Farr, M.J., Eds.; Erlbaum: Hillsdale, NJ, USA, 1987; pp. 223–253.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453–467.

Vosniadou, S. (1994b). Capturing and modelling the process of conceptual change [Special issue]. *Learning and Instruction,* 4, 45–69.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης, Α. (2009). *Μαθηματικά Δ΄Δημοτικού.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2013). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου.* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Θεοδώρου, Ε., Λεμονίδης, Χ., Νικολαντωνάκης, Κ., Παπαδάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2009). *Μαθηματικά Γ΄Δημοτικού: Μαθηματικά της φύσης και της ζωής.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (2009). *Μαθηματικά Ε΄Δημοτικού.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Βρυώνης, Κ. (2009). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

ΠΣΔ. (2013). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των θετικών μαθημάτων των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Ημερήσιου και Εσπερινού Γυμνασίου για το σχ. έτος 2013-14*. Ανάκτηση από το www.sch.gr.

Abstract

The article describes a teaching scenario aiming for students to realize that for any fraction there is no next or previous fraction as happens to natural numbers. It is actually a step towards the understanding of the density of rational numbers which is considered to be a slow and time consuming process. There is one computer for every two students in the school's computer lab. The students place 25 fractions on the same number line using a GeoGebra file which was created for this scenario, thus resulting to the ordering of the fractions without having to convert the fractions to decimals or with common denominators as they used to do when solving similar problems in class. This is the point where technology is necessary. After ordering the fractions, they use them to solve a dot-to-dot puzzle on an A4 paper sheet. The scenario was applied to 7th grade students in Athens. They solved the puzzle showing enthusiasm and curiosity for the outcome and discussed important mathematical issues about fractions while placing them on the number line.

Keywords: fractions, number line, ordering, GeoGebra, density