

Διδασκαλία της αναδρομικής μεθόδου σε μαθητές γυμνασίου με τη χρήση μορφοκλασμάτων: ένα ολοκληρωμένο σχέδιο μαθήματος

Δρακόπουλος Βασίλειος¹, Σιούλας Παναγιώτης - Βλάσιος²

¹Τμήμα Πληροφορικής με εφαρμογές στη Βιοϊατρική, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
vdrakop@uth.gr

²Τμήμα Πληροφορικής με εφαρμογές στη Βιοϊατρική, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
psioulas@uth.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία προτείνεται ένα σχέδιο μαθήματος μίας διδακτικής ώρας για μαθητές της Γ' Γυμνασίου και αφορά στην εκμάθηση της αναδρομής χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού *python* σε συνδυασμό με τη βιβλιοθήκη *turtle*. Η πρόταση διδασκαλίας της συγκεκριμένης μεθόδου χρησιμοποιεί μία ειδική κατηγορία συνόλων τα οποία ονομάζονται μορφοκλασματικά σύνολα. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης μεθόδου αναμένονται να είναι θετικά καθώς οι μαθητές έρχονται σε επαφή με μία δύσκολη προγραμματιστική τεχνική δίχως διδαχή δύσκολων μαθηματικών εννοιών.

Λέξεις κλειδιά: αναδρομή, γεωμετρία, γραφική υπολογιστών, μορφοκλασμα, *python*

1. Εισαγωγή

Η τεχνική της αναδρομής αποτελεί μία δημοφιλή μέθοδο ανάπτυξης προγραμμάτων Η/Υ. Στηρίζεται στην προσφερόμενη από όλες τις σύγχρονες γλώσσες προγραμματισμού δυνατότητα κατά την οποία μία διαδικασία ή συνάρτηση καλεί τον εαυτό της (Βακάλη κ.ά., 1999).

Η πιο απλή διαδικασία υπολογισμού του πλήθους ενός κλασικού συνόλου είναι η μέτρηση των στοιχείων του. Στην περίπτωση κατά την οποία τα στοιχεία του συνόλου αυτού ταξινομούνται σε μία ακολουθία υποσυνόλων, τότε η μέτρηση των στοιχείων αυτών (των υποσυνόλων) καθίσταται αδύνατη. Εξαίρεση αποτελούν τα υποσύνολα των οποίων το πλήθος των στοιχείων τους προκύπτει με κάποια σχέση των στοιχείων των αμέσως προηγούμενων συνόλων. Η σχέση αυτή ονομάζεται αναδρομή (Γεωργίου κ.ά., 2015).

Η Αναδρομή ως θεωρία υπάρχει σε βιβλιογραφικές αναφορές από τη δεκαετία του 1930 και τη συναντάμε σε έργα των Gödel (Gödel, 1930), Church (Church, 1936), Turing (Turing, 1937), Kleene (Kleene, 1936) και Emil Post (Post, 1944). Σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία, αναδρομή είναι η διαδικασία δημιουργίας μίας

ιεραρχημένης κλάσης συνόλων, κάθε ένα εκ των οποίων δημιουργείται χάρις σε μία σχέση των προηγούμενων αυτού συνόλων.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται μία συνοπτική αναφορά και παρουσίαση των μορφοκλασμάτων, ενώ στο δεύτερο μέρος αναλύεται μία πρόταση διδασκαλίας η οποία βασίζεται στα μορφοκλάσματα και αφορά στη διδασκαλία της αναδρομής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και συγκεκριμένα στη Γ' τάξη του Γυμνασίου.

2. Τι είναι τα μορφοκλάσματα

Πολλά φυσικά και τεχνητά φαινόμενα έχουν το πολύ βασικό χαρακτηριστικό του αναλλοίωτου υπό διαφορετικές κλίμακες, έχουν άπειρη λεπτομέρεια σε κάθε σημείο, είναι αυτοόμοια κατά μήκος διαφορετικών κλιμάκων και δύνανται να περιγραφούν από μία διαδικασία καθορίζουσα μία επαναλαμβανόμενη λειτουργία για την παραγωγή των λεπτομερειών. Ο όρος «fractal» εισήχθη κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1970 από τον Γάλλο, Πολωνικής καταγωγής, μαθηματικό Benoit Mandelbrot. Προέρχεται από το λατινικό επίθετο fractus (θρυμματισμένος, σπασμένος, συντεθλιμμένος, κομματιασμένος) ομόρριζο του fraction (κλάσμα) και του fragment (τέμαχος, θραύσμα) και σημαίνει «ακανόνιστος, τεμαχισμένος, θραυσμένος»· σχετίζεται με το ρήμα frangere, το οποίο σημαίνει θραύω ή σπάω ή κλάω (κλῶ).

Ο Mandelbrot ορίζει ως fractal ένα σύνολο του οποίου η διάσταση Hausdorff-Besicovitch είναι μεγαλύτερη της τοπολογικής ή της διαισθητικής του διάστασης (Mandelbrot, 1978). Επειδή η διάσταση δύναται να χρησιμοποιηθεί για να ποσοτικοποιήσει μία πτυχή της «μορφής», ο όρος αποδίδεται στην ελληνική γλώσσα συνήθως ως «μορφόκλασμα». Ο Falconer (Falconer, 2004) εμπλούτισε τον ανωτέρω ορισμό με κάποιες ιδιότητες. Σύμφωνα με τον Falconer, ως μορφόκλασμα χαρακτηρίζεται ένα σύνολο σημείων εμφανίζον νέες λεπτομέρειες σε κάθε κλίμακα μεγέθους του. Επίσης, χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα της αυτοομοιότητας, δηλαδή ένα επί μέρους τμήμα του είναι όμοιο προς ένα άλλο ανεξαρτήτως της αλλαγής κλίμακας. Η συγκεκριμένη ιδιότητα αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό των μορφοκλασμάτων (Barnsley, 1988). Τέλος, ένα μορφόκλασμα δύναται να δημιουργηθεί μέσω μίας επαναληπτικής διαδικασίας σε κάθε επί μέρους βήμα στην οποία εφαρμόζεται η ίδια μέθοδος.

Επιπροσθέτως, η ανακάλυψη των μορφοκλασμάτων φανέρωσε τα μυστικά της γεωμετρικής πολυπλοκότητας της φύσης και προσέφερε μία νέα ορολογία μέσω της οποίας δυνάμεθα να περιγράψουμε, μεταξύ άλλων, νέφη, δένδρα και σπόγγους κατά τον ίδιο τρόπο με τον οποίο θα περιγράφαμε τις διακλαδώσεις των αιμοφόρων αγγείων και τους πνεύμονες· βλ. (Δρακόπουλος, 2012).

2.1 Η έννοια της αυτοομοιότητας

Αυτοόμοιο χαρακτηρίζεται ένα αντικείμενο του οποίου τα επί μέρους μέρη ομοιάζουν προς το όλον. Η επανάληψη των σχηματισμών λαμβάνει χώρα προοδευτικώς σε μικρότερες κλίμακες και είναι δυνατόν το κάθε επί μέρους τμήμα, όταν μεγεθυνθεί, να ομοιάζει προς το συνολικό αντικείμενο παραμένοντας αναλλοίωτο υπό αλλαγές κλίμακας (Song, Havlin, & Makse, 2005). Τα ανωτέρω χαρακτηριστικά τα συναντάμε στις νιφάδες χιονιού, στον φλοιό των δένδρων, σε ένα σύννεφο, στις ακτογραμμές, στην έρημο και αλλαχού (Εικόνα 1).



Εικόνα 1: Φυσικά μορφοκλάσματα

Ωστόσο, δεν υπάρχουν δύο όμοια δένδρα ούτε δύο όμοια σύννεφα, ούτε υπάρχουν δύο βράχοι, δύο ακτές, δύο έρημοι, δύο γαλαξίες των οποίων η μορφή και οι διαστάσεις συμπίπτουν απολύτως. Ο φυσικός κόσμος πολλαπλασιάζεται με πείσμα, υπομονή και μνήμη του αρχετύπου, σαν ένα φύλλο φτέρης αντιγράφον το ίδιο σχήμα σε κάθε ένα εκ των τμημάτων του, όπως η ανάκλαση του ειδώλου ενός καθρέφτη εντός του ίδιου, δίχως τέλος (Ευαγγελάτου-Δάλλα & Δρακόπουλος, 1997).

2.1 Παιδαγωγική αξιοποίηση

Οι μαθητές έχοντας λάβει αρκετή γνώση κατά τη φοίτησή τους στις τάξεις του δημοτικού σχολείου, έχουν αποκτήσει μία θετική στάση έναντι των Η/Υ. Ωστόσο, στις τάξεις του Γυμνασίου έρχονται «αντιμέτωποι» με αμιγώς προγραμματιστικές έννοιες (ακολουθιακή δομή, δομή επιλογής, δομή επανάληψης κ.ά.) τις οποίες καλούνται τόσο να τις κατανοήσουν όσο και να είναι σε θέση να τις υλοποιήσουν σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον. Το αποτέλεσμα όλων αυτών οδηγεί στην απότομη «προσγείωσή» τους καθώς από την εκμάθηση χρήσης κάποιων εφαρμογών έρχονται αντιμέτωποι με έναν δύσκολο τομέα της πληροφορικής, αυτόν του προγραμματισμού Η/Υ.

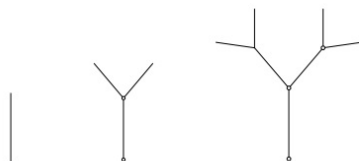
Αυτό που δεν χάνει όμως την αξία του είναι ο μαγικός κόσμος των χρωμάτων και των γραφικών. Στα παιδιά του Γυμνασίου αρέσει περισσότερο η Ζωγραφική (Paintbrush) από ότι η Επεξεργασία Κειμένου, τα Λογιστικά Φύλλα ή οι Βάσεις Δεδομένων. Επομένως, οι μαθητές τείνουν να επιλέγουν τη δημιουργία. Στη σημερινή εποχή, έχει αναγνωριστεί η σημασία της εικόνας, ως το χρησιμότερο μέσο περιγραφής πολύπλοκων αφηρημένων σχέσεων (Ευαγγελάτου-Δάλλα & Δρακόπουλος, 1997).

Εξ αιτίας των εντυπωσιακών σχημάτων τους, τα μορφοκλάσματα είναι δυνατόν να εντυπωσιάσουν τους μαθητές και να τους κεντρίσουν τον ενδιαφέρον. Η οπτική αυτή έκφραση αφυπνίζει και ικανοποιεί ακόμη και αισθητικές αναζητήσεις, διότι οι ωραίες εικόνες εντυπωσιάζουν τους μαθητές (Δρακόπουλος & Μπεμ, 1997). Η διδασκαλία βασικών εννοιών του προγραμματισμού Η/Υ με τη χρήση των μορφοκλασματικών συνόλων δύναται να θεωρηθεί ένα πρωτόγνωρο αντικείμενο προσφέρον την ευκαιρία στους μαθητές να αλληλοεπιδράσουν δημιουργικώς με τον προγραμματισμό αλλά παράλληλα και τη γεωμετρία. Επιπλέον, τους παρέχεται η δυνατότητα μέσω του προγραμματισμού να δημιουργήσουν σχήματα και εικόνες που ίσως δεν είχαν φανταστεί ότι μπορούσαν να πραγματοποιηθούν. Επιπροσθέτως, έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν κλασικές πτυχές του προγραμματισμού μέσω μίας ενδιαφέρουσας προσέγγισης.

Οι προσφερόμενες δημιουργικές δυνατότητες είναι πολυεπίπεδες με αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να έχει πληθώρα επιλογών για το πώς εμπλουτίζει τη διδασκαλία του και παράλληλα το υλικό του (Καρακώστα, 2005). Η γεωμετρία των μορφοκλασμάτων είναι μία νέα γλώσσα η οποία χρησιμοποιείται για να περιγράψει, να δώσει πρότυπα και να αναλύσει τις πολύπλοκες μορφές οι οποίες παρατηρούνται στη φύση (Δρακόπουλος, 2012). Επίσης, αποτελεί το πλέον κατάλληλο περιβάλλον για την βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης καθώς σε ανοικτά περιβάλλοντα μάθησης είναι δυνατή η δημιουργία δραστηριοτήτων με τις οποίες οι μαθητές αναπτύσσουν έννοιες από τον επαγωγικό συλλογισμό, στον παραγωγικό, πειραματιζόμενοι (Πατσιομίτου, 2005). Χαρακτηριστική εφαρμογή αποτελεί η ερευνητική δραστηριότητα «Γνωριμία με τα Fractals» του κρηπιδώματος «ψηφιακό σχολείο» του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων ("Photodentro: Γνωριμία με τα Fractals," 2015).

2.1 Δυαδικό δένδρο

Ένα κλασικό παράδειγμα μορφοκλασματικού σχήματος αποτελεί το δυαδικό δένδρο (Εικόνα 2).



Αρχή 1^η αναδρομή 2^η αναδρομή

Εικόνα 2: Δυαδικό δένδρο

Το συγκεκριμένο σχήμα εκκινεί από ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα που εκπροσωπεί τον κύριο κορμό ενός δένδρου. Από την κορυφή του κορμού εκκινούν

δύο ευθύγραμμα τμήματα (κλάδοι) του ίδιου μήκους, έτσι ώστε να σχηματίζουν ίδια γωνία με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται στα άκρα καθενός κλάδου έτσι ώστε να διατηρούνται οι αναλογίες για τους κλάδους και οι γωνίες επίσης να είναι ίσες (Τουμάσης & Αρβανίτης, 2006).

Όπως είδαμε παραπάνω, ένα μορφοκλασμα έχει τη δυνατότητα επανάληψης. Η συγκεκριμένη δυνατότητα ισοδυναμεί με την έννοια της αναδρομής, συνεπώς υπάρχει η δυνατότητα διδασκαλίας της κατά έναν διαφορετικό τρόπο δίχως χρήση πολύπλοκων μαθηματικών τύπων και αποφεύγοντας παραδείγματα, όπως η ακολουθία Fibonacci και η εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα ολοκληρωμένο σχέδιο μαθήματος για τη διδασκαλία της αναδρομής με τη χρήση μορφοκλασματικών συνόλων.

3. Σχέδιο μαθήματος

Στην παρούσα ενότητα προτείνεται ένα σχέδιο μαθήματος μίας διδακτικής ώρας κατά την οποία πραγματοποιείται μία εισαγωγή στην αναδρομική μέθοδο. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι θεωρούμε πως οι μαθητές έχουν διδαχθεί υποπρογράμματα (διαδικασίες) στη γλώσσα προγραμματισμού python.

3.1 Γενικά Στοιχεία

Μάθημα: Πληροφορική Γ' Γυμνασίου

Τίτλος

- «Διδασκαλία της έννοιας της αναδρομής μέσω γεωμετρικών σχημάτων με χρήση της γλώσσας python»

Μέρος Α' Γενικά Στοιχεία – Στόχοι – Μέσα

- Τάξη: Γ' Γυμνασίου
- Χώρος: Σ.Ε.Π.Ε.Η.Υ.
- Διδακτική ώρα: 1

Σκοπός

- Ο μαθητής να δημιουργεί και να διερευνά τις γεωμετρικές κατασκευές κάνοντας χρήση της αναδρομικής μεθόδου.

Διδακτική Προσέγγιση

- Εμπλουτισμένη εισήγηση, συνεργατική μάθηση, κατευθυνόμενη ανακαλυπτική διδασκαλία

Στόχοι

Ο μαθητής

- Να μπορεί να σχεδιάζει μικρά σχήματα χρησιμοποιώντας την αναδρομή
- Να κατανοεί τη λειτουργία των βασικών εντολών της αναδρομής
- Να είναι σε θέση να παραμετροποιεί τμήματα κώδικα
- Να είναι ικανός να αλλάζει τις παραμέτρους σε μία συνάρτηση ή διαδικασία

- Να διακρίνουν τη fractal διάσταση αυτοομοιότητας από την τοπολογική διάσταση.
- Να αναγνωρίζουν ότι αυτοομοιότητα και fractal διάσταση αυτοομοιότητας έχουν και σχήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
- Να ορίζουν ως fractal ένα σύνολο του οποίου η fractal διάσταση υπερβαίνει την τοπολογική του διάσταση (Οικονομίδης & Καλκάνης, 2007)

Μέσα Διδασκαλίας

- Η/Υ, προβολέας δεδομένων, πίνακας μαρκαδόρου, λογισμικό pycharm ή ανάλογο περιβάλλον που χρησιμοποιεί τη γλώσσα python

Πηγές - Βιβλιογραφία

- Πληροφορική Γ' Γυμνασίου (Αγγελής κ.ά., 1997)

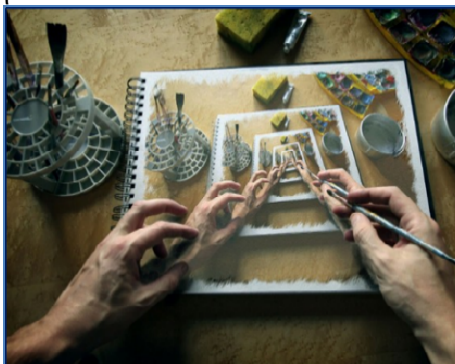
3.2 Διδασκαλία

Προετοιμασία - Σύνδεση με τα προηγούμενα (5')

- Στους μαθητές γίνονται ερωτήσεις σχετικά με τη λειτουργία των διαδικασιών της γλώσσας python.
- Στη συνέχεια οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των δύο ή των τριών ατόμων.

Παρουσίαση (35')

- Παρουσίαση της έννοιας της αναδρομής χρησιμοποιώντας την Εικόνα 3 και την Εικόνα 4.

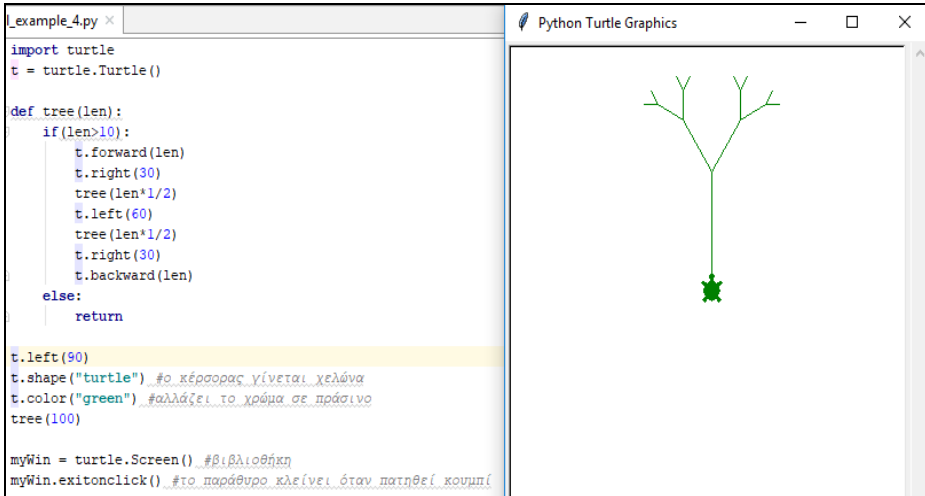


Εικόνα 3: Πίνακας ζωγραφικής



Εικόνα 4: Μπρόκολο

- Στη συνέχεια, δίνεται στους μαθητές το τμήμα κώδικα που φαίνεται στην Εικόνα 5 το οποίο καλούνται να γράψουν στο περιβάλλον pycharm και στη συνέχεια να το «τρέξουν».
- Δίνεται χρόνος 5' ζητώντας τους να γράψουν πώς εκείνοι σκέφτονται ότι εκτελείται ο αλγόριθμος που έγραψαν
- Έπειτα τους ζητείται να καταδείξουν την ή τις αναδρομικές εντολές
- Τους παρουσιάζεται ο χαρακτηρισμός των μορφοκλασματικών συνόλων
- Τέλος, τους δίνεται το φύλλο εργασίας



Εικόνα 5: Παράδειγμα 1

Ανακεφαλαίωση (1')

Αξιολόγηση (5')

- Για ποιο λόγο χρησιμοποιούμε την αναδρομή;
- Αλλάζετε την τιμή της μεταβλητής len, τί παρατηρείτε ότι συμβαίνει;

3.3. Φύλλο εργασίας

Άσκηση 1. Πληκτρολογήστε τον κώδικα που σας δίνεται έτσι ώστε να δημιουργηθεί το δενδράκι του Σχήματος 1.

<pre> import turtle t = turtle.Turtle() def tree(len): if(len>10): t.forward(len) t.right(30) tree(len * 2 / 3) t.left(60) tree(len * 2 / 3) t.right(30) t.backward(len) else: return t.left(90) tree(100) myWin = turtle.Screen() myWin.exitonclick() </pre>	<p>Σχήμα 1: Άσκηση 1</p>
--	---------------------------------

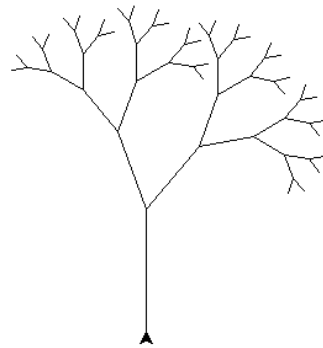
Άσκηση 2: Να εκτελέσετε στο χαρτί το παραπάνω τμήμα, έτσι ώστε να κατανοήσετε τη λειτουργία του.

Άσκηση 3: Να κάνετε τις δικές σας παραλλαγές, αλλάζοντας τα εξής: α. το όριο 10 στη συνθήκη τερματισμού της εκτέλεσης, β. το κλάσμα που ορίζει τι μέρος του θα χρησιμοποιηθεί σε κάθε κλήση, γ. τη γωνία που σχηματίζουν οι κλάδοι του. Σε ότι αφορά τη γωνία χρειάζεται προσοχή για το ποία τιμή θα δώσετε και θα την ανακαλύψετε μόνοι σας.

Κατ' οίκον εργασίες

Εργασία 1: Να πληκτρολογήσετε τον δοσμένο κώδικα έτσι ώστε να δημιουργηθεί το δενδράκι του Σχήματος 2.

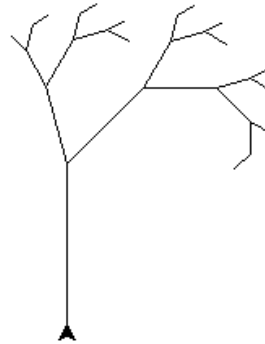
```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.left(90)
def tree(len):
if(len>10):
t.forward(len)
t.right(40)
tree(len * 2 / 3)
t.left(60)
tree(len*2/3)
t.right(20)
t.backward(len)
else:
return
tree(100)
myWin = turtle.Screen()
myWin.exitonclick()
```



Σχήμα 2: Άσκηση 2

Εργασία 2: Να πληκτρολογήσετε τον δοσμένο κώδικα έτσι ώστε να δημιουργηθεί το δενδράκι του Σχήματος 3.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.left(90)
def tree(len):
if(len>10):
t.forward(len)
t.right(45)
tree(len * 2 / 3)
t.left(60)
tree(len / 2)
t.right(15)
t.backward(len)
else:
return
tree(100)
myWin = turtle.Screen()
myWin.exitonclick()
```



Σχήμα 3: Άσκηση 3

Εργασία 3: Να δημιουργήσετε τις κατάλληλες παραμέτρους στην επικεφαλίδα της διαδικασίας tree οι οποίες θα δέχονται τα στοιχεία που θέλετε να μεταβάλλονται έτσι ώστε να μην είναι απαραίτητο να αλλάζετε κάθε φορά τη σύνταξή της.

4. Επίλογος

Ο εμπλουτισμός της διδασκαλίας με τη χρήση γραφικών προσφέρει νέες δυνατότητες ως προς την εκμάθηση διάφορων μαθημάτων καθώς, όπως είναι επιστημονικώς τεκμηριωμένο, η χρησιμοποίηση εικόνων βοηθάει στην εγρήγορση και στην καλύτερη κατανόηση του μαθήματος από την πλευρά των μαθητών. Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε μία ολοκληρωμένη πρόταση διδασκαλίας της έννοιας της αναδρομής παραβλέποντας τα κλασικά μαθηματικά προβλήματα ή παραδείγματα, όπως η ακολουθία Fibonacci, το παραγοντικό ενός αριθμού ή η εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη και επικεντρώνοντας την προσπάθεια στη χρήση ειδικών γεωμετρικών σχημάτων τα οποία ονομάζονται μορφοκλάσματα. Εφαρμόζοντας τη συγκεκριμένη πρακτική οι μαθητές αντιλαμβάνονται οπτικώς, πώς λειτουργεί η αναδρομική μεθοδολογία η οποία είναι από τις δυσκολότερες έννοιες στον προγραμματισμό και προβληματίζει όχι μόνο μαθητές αλλά και φοιτητές σχολών πληροφορικής. Η συγκεκριμένη διδασκαλία υλοποιήθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού python, η οποία θεωρείται κατάλληλη για την μύηση των μαθητών σε μία γλώσσα προγραμματισμού.

Αναφορές

- Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere* (San Diego: Academic Press, Inc).
- Church, A. (1936). A note on the Entscheidungs problem. *The journal of symbolic logic*, 1(1), 40–41.
- Falconer, K. J. (2004). *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*: John Wiley & Sons.
- Gödel, K. (1930). Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37(1), 349–360.
- Kleene, S. C. (1936). General recursive functions of natural numbers. *Mathematische Annalen*, 112(1), 727–742.
- Mandelbrot, B. B. (1978). The fractal geometry of trees and other natural phenomena *Geometrical probability and biological structures: Buffon's 200th anniversary* (pp. 235-249): Springer.
- Photodentro: Γνωριμία με τα Fractals. (2015, January 1). Ανάκτηση από <http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8003?locale=el>
- Post, E. L. (1944). Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. *bulletin of the American Mathematical Society*, 50(5), 284–316.
- Song, C., Havlin, S., & Makse, H. A. (2005). *Self-similarity of complex networks*. *Nature*, 433(7024), 392.
- Turing, A. M. (1937). Computability and λ -definability. *The journal of symbolic logic*, 2(4), 153–163.
- Αγγελής, Α., Αλεξανδρής, Ν., Γεωργιάδης, Π., Γκυρτής, Κ., Κωστάκος, Α., Ράπτης, Α., & Στεργιοπούλου-Καλαντζή, Ν. (1997). *Πληροφορική Γ' Γυμνασίου*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.
- Βακάλη, Αθηνά, Γιαννόπουλος, Η., Ιωαννίδης, Χ., Κοίλιας, Χ., Μάλαμας, Κ., Μανωλόπουλος, Ι., & Πολίτης, Π. (1999). *Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον*. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.
- Γεωργίου, Δ., Αντωνίου, Ε., & Χατζημιχαηλίδης, Α. (2015). *Διακριτές μαθηματικές δομές για την επιστήμη των υπολογιστών*. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Διαθέσιμο στο: <http://hdl.handle.net/11419/457>

Δρακόπουλος Β. (2012). Η επιστημονική και καλλιτεχνική δημιουργία ως αρωγοί στην εκπαιδευτική διαδικασία, στο Γεώργ. Ε. Λευκαδίτης και Σταματίνα Γ. Μαλικούτη (επ.), *Γεωμετρία: Από την επιστήμη στην εφαρμογή* (σ. 597–608). Τ.Ε.Ι. Πειραιώς.

Δρακόπουλος, Β. και Μπεμ, Αλ. (1997). *Η Γεωμετρία της φύσης στην εκπαίδευση*, Δημερίδα Πληροφορικής «Η Πληροφορική στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση», ΕΠΥ, 117–124.

Ευαγγελάτου-Δάλλα, Λεώνη, και Δρακόπουλος, Β. (1997). *Η νέα διάσταση της εκπαιδευτικής μαθηματικής σκέψης*. 14^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., 235–242.

Καρακώστα, Α. (2005). *Γνωριμία με τα Φράκταλς – πρόταση διδασκαλίας τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση*. (Τμήμα μεταπτυχιακών σπουδών), Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Φλώρινα.

Οικονομίδης, Ι. Σ. και Καλκάνης, Γ.Θ. (2007). *Επαναληπτικές Διαδικασίες στην Εκπαίδευση στις Φυσικές Επιστήμες τα Μαθηματικά και την Πληροφορική*. (Πρακτικά 5ου Συνεδρίου) Διδακτική Φυσικών Επιστημών και Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση, 5 (Γ) 1035-1042. [<http://www.kodipheet.gr>]

Πατσιομίτου, Σ. (2005). *Τα fractals ως πλαίσιο κατανόησης ακολουθίας και ορίων μέσω της έννοιας του εμβαδού σε περιβάλλον δυναμικού χειρισμού Μαθηματικών αντικειμένων*. 22^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., 311–323.

Τουμάσης, Μ., & Αρβανίτης, Τ. (2006). *Αξιοποίηση του Sketchpad για τη δημιουργία και εξερεύνηση του κόσμου των Φράκταλς*. 23ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Πάτρα: Ε.Μ.Ε., 596–609.

Abstract

A one-teaching hour lesson plan intended for pupils of the 3rd Grade of Junior High School about learning recursion by using the programming language python in combination with its turtle library is proposed. The teaching proposal of the specific method uses a special category of sets which are called fractal sets. The outcome of the specific approach is expected to be positive since the students will be familiarised with a difficult programming technique without, however, being taught mathematical concepts that are difficult to understand.

Keywords: recursion, geometry, computer graphics, fractal, python