Στα τα ίχνη του ζευγαριού: Χρόνος - Απόσταση σε ένα ταξίδι ελεύθερης πτώσης

Τζούμπα Δήμητρα[1], Μαυρουδής Σπύρος[2]

[1]Καθηγήτρια Μαθηματικών, MSc Ρομποτική & Αυτόματος Έλεγχος, Υ/δντρια Γυμνασίου Αμπελακίων Σαλαμίνας

dtzoumpa@gmail.com

[2] Μαθηματικός Επιμορφωτής ΚΣΕ

smayroudis@sch.gr

Περίληψη

Μέσα από ένα πολύ οικείο παράδειγμα της καθημερινότητας, την ελεύθερη πτώση μια μπάλας από ύψος, οι μαθητές της Γ' Τάξης του Γυμνασίου Αμπελακίων Σαλαμίνας, προσεγγίζουν την συνμεταβολή του χρόνου και του διαστήματος, με την βοήθεια της τεχνολογίας. Παρατήρησαν τις διάφορες φάσεις του φαινομένου, κατέγραψαν τα ζεύγη των δεδομένων και τα απεικόνισαν στο καρτεσιανό επίπεδο. Η τεχνολογία συνεισέφερε στο να συλλεχθούν δεδομένα με μεγαλύτερη πυκνότητα και η γραφική παράσταση να αποκτήσει «ποιοτικότερη» σχεδίαση, αποκαλύπτοντας την καμπυλότητα στην παραβολή που προέκυψε. Πειραματιζόμενοι με την βοήθεια του λογισμικού, διατύπωσαν απόψεις που ελέγχονταν για την ορθότητά τους, σχετικά με τις τιμές των συντελεστών της γραφικής παράστασης της παραβολής

$$y = a(x - b)^2 + c \tag{1}$$

Λέξεις – κλειδιά: Παραβολή, Μη Γραμμική Μεταβολή Μεγεθών.

Εισαγωγή

Επειδή από τις κοινότητες των μαθητών και μαθητριών απουσιάζει η εμπειρία και η αυθεντία που υπάρχει στις κοινότητες των ειδικών, οι εκπαιδευτικοί φέρουν μεγάλη ευθύνη για την καθοδήγηση της δραστηριότητας των παιδιών, για την μοντελοποίηση της μαθηματικής συμπεριφοράς τους και για την παροχή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, τα οποία θα μετατρέψουν το λόγο των μαθητών και μαθητριών σε χρήσιμη επικοινωνία για τα μαθηματικά. Τέτοια ευθύνη απαιτεί συμπεριφορές και πεποιθήσεις εκπαιδευτικών εντελώς διαφορετικές από τις παραδοσιακές (Davis, Maher, Noddings 1990).

Οι τρόποι αξιοποίησης των ψηφιακών εργαλείων στη σχολική τάξη των μαθηματικών και ιδιαίτερα η φύση και τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων στις οποίες θα κληθούν να εμπλακούν μαθητές και εκπαιδευτικοί έχει αποτελέσει εδώ και χρόνια κεντρικό σημείο αιχμής στο πλαίσιο του ευρύτερου προβληματισμού που αφορά την ένταξη της ψηφιακής τεχνολογίας στο σχολείο (diSessa et al, 1995; Goldenberg, 1999; Hoyles, 2001).

Η προοπτική χρήσης της τεχνολογίας στο μάθημα, σε αντίθεση με την ευρέως θεωρούμενη αυταπόδεικτη αξία της, φέρνει στο προσκήνιο όλες τις παραμέτρους που σχετίζονται με τους ρόλους και τις δραστηριότητες των συμμετεχόντων στη διδακτική πράξη (Κυνηγός & Δημαράκη, 2002), την ανάγκη μελέτης των μαθηματικών εννοιών που ευνοεί ένα υπολογιστικό περιβάλλον (Sutherland & Balacheff, 1999), το είδος των ανατιθέμενων στους μαθητές έργων (Hoyles, 2001) και, γενικότερα, το πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διδασκαλία (Nardi, 1996). Η προσέγγιση αυτή υπαγορεύεται από την καταλυτική επιρροή της χρήσης της τεχνολογίας σε όλα τα επίπεδα της σχεδίασης και της εξέλιξης του μαθήματος στην τάξη στα οποία συμπεριλαμβάνονται στοιχεία όπως η συνεργατική μάθηση σε ομάδες, η αλλαγή των παραδοσιακών ρόλων δασκάλων και μαθητών και η ενίσχυση της ανάπτυξης μαθητοκεντρικών διδακτικών μοντέλων, όπου ο δάσκαλος έχει τη δυνατότητα να παρεμβαίνει στη μαθησιακή διαδικασία ενεργά, ως σύμβουλος και συνεργάτης των παιδιών (Hoyles & Noss, 1992).

Τα ερωτήματα που αναδύονται είναι πολλά και κρίσιμα: Ποια μορφή είναι σκόπιμο να έχουν οι δραστηριότητες στις οποίες θα κληθούν να εμπλακούν οι μαθητές στη διάρκεια ενός μαθήματος με χρήση ψηφιακών εργαλείων στην τάξη; Ποιες είναι οι παράμετροι με βάση τις οποίες καθορίζεται ο ρόλος της υπολογιστικής τεχνολογίας στη μαθησιακή διαδικασία σε αυτή την περίπτωση; Τι αλλάζει στο μάθημα όταν αυτό περιλαμβάνει τη χρήση υπολογιστών; Τι μπορεί να κάνει ο μαθητής και ο εκπαιδευτικός με την τεχνολογία αυτή που είτε είναι αδύνατο είτε πολύ δύσκολο πρακτικά όταν δεν την διαθέτει; Τι είδους δραστηριότητες λαμβάνουν χώρα και πώς αυτό επηρεάζει τους ρόλους των συμμετεχόντων στη διδακτική πράξη;

Καθώς η εκμάθηση των Μαθηματικών αποτελεί μια εμπειρική, υποθετικο - παραγωγική διαδικασία, ζητούμενο είναι η δημιουργία και ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, αντιπαραδείγματα και συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους (Κυνηγός, 2007). Για την περίπτωση των Μαθηματικών η ψηφιακή τεχνολογία, μπορεί να αξιοποιηθεί ακριβώς σε αυτό το πλαίσιο όταν χρησιμοποιούνται ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εκφραστικά εργαλεία σε συνδυασμό με εργαλεία υποστήριξης συλλογικού διαλόγου και επιχειρηματολογίας (Ματσαγγούρας 1987, Κουτσελίνη & Θεοφιλίδης 2002). Τα εργαλεία αυτά επίσης, υποστηρίζουν την διασύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών που είναι κατακερματισμένες στο αναλυτικό πρόγραμμα, όπως η Άλγεβρα και η Γεωμετρία. Με τα εργαλεία αυτά οι μαθητές αποκτούν εμπειρίες εμπλοκής με την λογικο-μαθηματική σκέψη τις οποίες είναι αδύνατον να έχουν χωρίς τα δυναμικά αυτά μέσα. Ο δυναμικός χειρισμός, η παρατήρηση και οι αλληλοεξαρτώμενες παραστάσεις, είναι οι ιδιότητες των εργαλείων που ενδιαφέρουν την διδακτική των μαθηματικών (Κυνηγός 2007). Με αυτό το σκεπτικό, θελήσαμε να δοκιμάσουμε σε σχολική τάξη μαθητών μια εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, από την φυσική με άμεση συσχέτιση με την Άλγεβρα.

Μεθοδολογία

Η εργασία αυτή, διεξάχθηκε στην σχολική αίθουσα με την χρήση υπολογιστή που εκτελούσε το πρόγραμμα Geogebra, διασυνδεδεμένο με διαδραστικό πίνακα και έντυπων φύλλων εργασίας. Ο χρόνος υλοποίησής της ήταν τρεις (3) διδακτικές ώρες. Οι είκοσι μαθητές (έντεκα αγόρια και εννέα κορίτσια), εργάστηκαν σε ομάδες των δύο ατόμων και καθοδηγούμενοι από το φύλλο εργασίας, τους ζητήθηκε να παρατηρήσουν ένα φαινόμενο, να καταγράψουν τις αντίστοιχες τιμές των συμμεταβαλόμενων μεγεθών (χρόνος & απόσταση) και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Κατά αυτόν τον τρόπο, έγινε προσπάθεια να ελεγχθούν διακριτικά τα συμπεράσματά τους και να καθοδηγηθούν έτσι ώστε μέσα από αυτά να αντιληφθούν καλύτερα κανόνες και έννοιες. Καθόλη την διάρκεια, ενθαρρύνονταν συνεχώς να επεκτείνουν την διερεύνησή τους.

Σκοπός

Σκοπός της εργασίας αυτής ήταν να συμβάλει στην αλλαγή και βελτίωση της σκέψης-στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους, συνειδητοποιώντας ότι τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και όχι απλά μια αποστήθιση φορμαλιστικών παραστάσεων. Στην εργασία αυτή, ενεπλάκησαν οι μαθητές σε δραστηριότητες, κατά τις οποίες εξασκήθηκαν με στόχο να παρατηρούν, να συνεργάζονται, να εικάζουν, να επαληθεύουν και να συνδέουν συμμεταβολές και αναλλοίωτα με μαθηματικές έννοιες.

Στόχοι

Σε αυτή την εργασία, τέθηκαν συγκεκριμένοι στόχοι. Ο πρώτος εξ αυτών ήταν σε κοινωνικό – πολιτισμικό επίπεδο, να μάθουν οι μαθητές να συνεργάζονται μεταξύ τους, να λειτουργούν ως μέλη μιας ομάδας και να τοποθετούνται με τεκμηριωμένες απόψεις. Ο επόμενος στόχος ήταν διδακτικός, δηλαδή, να μπορούν οι μαθητές να κάνουν εικασίες – πειραματισμούς και να επαληθεύουν ή και όχι, τις εικασίες τους, χρησιμοποιώντας μικρόκοσμους με την βοήθεια του λογισμικού Geogebra. Τέλος σε γνωστικό επίπεδο, ο αρχικός στόχος ήταν να διαπιστώσουν οι μαθητές την διαφορά της κυρτότητας που παρουσιάζει η παραβολή με την μέχρι πρότινος γνωστή τους ευθεία και ο δεύτερος, να αντιληφθούν πώς μεταβάλλεται η γραφική παράσταση της παραβολής σε σχέση με τις τιμές των συντελεστών της.

1η Δραστηριότητα

Στην πρώτη δραστηριότητα του φύλλου εργασίας που δόθηκε στους μαθητές, ζητήθηκε να συμπληρώσουν τα κενά που υπήρχαν στο κείμενο παρατηρώντας μια εικόνα που έδινε δεδομένα για το πρόβλημα, ώστε να ξεκινήσουν την διαδικασία της μάθησης με ένα απλοϊκό παιχνίδι συμμετοχής. Απεικονίζονταν ένα παιδί, να αφήνει μια μπάλα από την κορυφή του Λευκού Πύργου στην Θεσσαλονίκη. Οι ακόλουθες εικόνες, αποτελούσαν διαδοχικά χρονικά στιγμιότυπα από την ελεύθερη πτώση της μπάλας (Εικόνα 1).

Εικόνα 1: *Παιχνίδι εισαγωγής και διαδοχικά στιγμιότυπα*

Από τα στιγμιότυπα αυτά, ζητήθηκε να πινακοποιηθούν σε ζεύγη δεδομένων οι τιμές του χρόνου και της διανυθείσας απόστασης κατά την πτώση. Σκοπός εδώ ήταν να ενεργοποιηθούν όλοι ανεξαιρέτως οι μαθητές, παρατηρώντας το σχήμα και καταγράφοντας τις σκέψεις τους, ώστε να συνειδητοποιήσουν την απλότητα της παρατήρησης αλλά και την απαραίτητη διαδικασία καταγραφής των παρατηρήσεων. Ενθαρρύνθηκαν θετικά από το πρώτο τους βήμα, για να συνεχίσουν έστω και δειλά. Όταν μοιράστηκαν τελικά τις απαντήσεις τους με τους υπόλοιπους μαθητές, τους επισημάνθηκε η ευκολία με την οποία κατέληξαν σε αυτές.

2η Δραστηριότητα

Στο φύλλο εργασίας, το δεύτερο βήμα ήταν η σχεδίαση σε προτυπωμένο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τα παρατηρηθέντα ζεύγη σημείων από τα διαδοχικά στιγμιότυπα. Οι μαθητές ανακαλέσανε από τη μνήμη τους την διαδικασία σχεδίασης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, με χρήση των συντεταγμένων σημείων της. Επόμενη κίνηση ήταν η εμπλοκή του λογισμικού στην υπηρεσία του μαθητή. Στο περιβάλλον του Geogebra, ορίστηκε η συνάρτηση από την φυσική, της ελεύθερης πτώσης ενός αντικειμένου από ύψος,

$$s = ½\ g \times t^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Οι μαθητές, ένας από κάθε ομάδα, επαλήθευσαν τις τιμές που κατέγραψαν στην προηγούμενη δραστηριότητα. Κατόπιν, πύκνωσαν τις τιμές του χρόνου, για να δημιουργηθούν περισσότερα σημεία για την γραφική παράσταση. Η χρησιμότητα, η ευκολία και η ουσιαστική βοήθεια από την χρήση του λογισμικού, τόσο για τον μαθητή όσο και για τον εκπαιδευτικό, ήταν εμφανής. Στόχος της δραστηριότητας αυτής, ήταν η διασύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινότητα, η ενεργοποίηση των μαθητών ως ερευνητή και η οπτικοποίηση της σχέσης που συνδέει τα δύο μεγέθη του πειράματος. Η οπτικοποίηση, συμβάλει στην δημιουργία εικασιών σχετικά με τον τρόπο συσχέτισης των μεταβλητών του πειράματος, αν δηλαδή, η θετική μεταβολή μιας μεταβλητής επιφέρει θετική μεταβολή στην συνάρτηση ή όχι, και ακόμη περισσότερο αν υπάρχει γραμμική αναλογία ή κάτι πολύ περισσότερο από το γραμμικό!

3η Δραστηριότητα

Μέχρι αυτό το σημείο, οι μαθητές απλά κατέγραψαν πινακοποιώντας τις μετρήσεις των μεγεθών (χρόνου - απόστασης) που έδινε η προσομοίωση του πειράματος με την βοήθεια του μικρόκοσμου και οπτικοποίησαν την σχέση που συνδέει αυτά τα δυο μεγέθη με τα σημεία που τοποθετήθηκαν σε καρτεσιανό επίπεδο. Δεν γνώριζαν για την σχέση – συνάρτηση $y = ax^2$ μεταξύ μεγεθών, απλά είχαν ενημερωθεί ότι σχετικά πειράματα της φυσικής έδειξαν ότι τα μεγέθη (χρόνος- απόσταση) υπακούουν στον κανόνα (2). Στη δραστηριότητα αυτή ζητείται να συμπληρωθεί ο Πίνακας 1.

Πίνακας 1*: Συντεταγμένες σημείων συναρτήσεων*

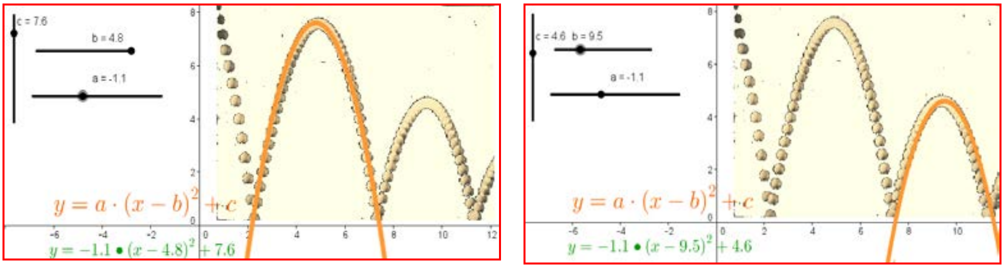
	x	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$f_1(x)$	x^2								
$f_2(x)$	$2x^2$								
$f_3(x)$	$-2x^2$								
$f_4(x)$	$2x^2 + 1$								
$f_5(x)$	$(x - 1)^2$								

Οι μαθητές έκαναν τους υπολογισμούς στο φύλλο εργασίας τους, αντάλλαξαν απόψεις για τις τιμές που προέκυπταν και στη συνέχεια τοποθέτησαν στο καρτεσιανό επίπεδο του φύλλο εργασίας, τα ζεύγη τιμών. Με την βοήθεια του μικρόκοσμου, διαπίστωσαν την ορθότητα ή μη των αποτελεσμάτων τους, τόσο για τα αριθμητικά δεδομένα όσο και για τις γραφικές παραστάσεις που σχεδίασαν στο καρτεσιανό επίπεδο.

Δράττοντας την ευκαιρία, με όλες αυτές τις γραφικές παραστάσεις μπροστά στα μάτια των μαθητών, τέθηκε ο προβληματισμούς προς τους μαθητές, για το πώς επηρεάζουν οι διάφορες τιμές των συντελεστών, την θέση της γραφικής παράστασης στο καρτεσιανό επίπεδο. Στόχος λοιπόν ήταν, να παρατηρήσουν και να σχολιάσουν το πώς ο συντελεστής a στην συνάρτηση (1), επιδρά στην μορφή της γραφικής παράστασης (προσανατολισμός και άνοιγμα), πώς επιδρά το b στην μετακίνηση της γραφικής παράστασης στον άξονα x'x και πώς επιδρά το c στην μετακίνηση της γραφικής παράστασης στον άξονα y'y. Μία ακόμη λεπτομέρεια ήταν η ύπαρξη του άξονα συμμετρίας. Τα παραπάνω διερευνήθηκαν με την αλλαγή των τιμών στις παραμέτρους της ορισθείσας συνάρτησης στο Geogebra. Ένα μέλος της ομάδας, έκανε αλλαγές και πριν τις εφαρμόσει, οι άλλες ομάδες εξέφραζαν την άποψή τους και σε περίπτωση διαφωνίας πυροδοτούνταν ανταλλαγές απόψεων με επιχειρήματα.

Αξιολόγηση

Επιδίωξη της εργασίας ήταν οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να διαπιστώσουν ότι το μάθημα, η διδασκαλία της παραβολής, δεν αποτελεί αντικείμενο ενός αποστειρωμένου σχολικού περιβάλλοντος αλλά συμβολικός τρόπος έκφρασης της καθημερινότητας. Για την επιβεβαίωση των στόχων της εργασίας και μετά το πέρας του μαθήματος, δόθηκε στους μαθητές ένα νέο φύλλο εργασίας όπου ζητούμενο ήταν ο σχολιασμός της κίνησης μια μπάλας που αναπηδά πάνω σε μια σκληρή, επίπεδη επιφάνεια.



Εικόνα 2: *Geogebra και η αναπήδηση της μπάλας*

Σε ένα αρχείο του λογισμικού Geogebra, με τους συντελεστές της συνάρτησης της παραβολής να λαμβάνουν τιμές από αντίστοιχους δρομείς, οι μαθητές προσέγγισαν την κίνηση με μια αντίστοιχη γραφική παράσταση παραβολής με ιδιαίτερη ευκολία και ταχύτητα (Εικόνα 2).

Επέκταση

Πιο ουσιαστικό και σημαντικό όμως είναι ότι μέσα από την συζήτηση και αναστοχασμό προέκυψαν πολύ αξιόλογες παρατηρήσεις – διαπιστώσεις αιτιολογήσεις όπως οτι είναι φυσικό η μεταβολή των b και a να μην επηρεάζει το ακρότατο αφού και ο τύπος του ακρότατου $y = \frac{-\Delta}{4A}$ δεν περιέχει ούτε το b ούτε το a

$$y = a(x-b)^2 + c \Rightarrow y = a(x^2 - 2bx + b^2) + c \Rightarrow y = ax^2 - 2abx + ab^2 + c$$

Θέτοντας Α = a, Β = -2ab και Γ = $ab^2 + c$, το ακρότατο δίνει τεταγμένη

$$y = \frac{-\Delta}{4\mathrm{A}} \Rightarrow y = \frac{-(\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{A}\Gamma)}{4\mathrm{A}} \Rightarrow y = \frac{-(4a^2b^2 - 4a(ab^2 + c))}{4a} \Rightarrow$$

$$y = \frac{-(4a^2b^2 - 4a^2b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow y = c$$

Οι μαθητές στο τέλος, εξέφρασαν και την άποψή τους σχετικά με την διαδικασία που ακολουθήθηκε, για αυτό το είδος μαθήματος που βίωναν. Στο σχετικό ερωτηματολόγιο, οι απόψεις τους έδειχναν ότι η προσέγγιση που ακολουθήθηκε, βάδισε με τρόπο που τους ήταν αρεστός. Προτίμησαν την συνεργασία μεταξύ τους, στην εργασία που έπρεπε να κάνουν αντί να εργάζονται κατά μόνας. Το τελευταίο, ενισχύεται από το γεγονός ότι, μέσω την ομαδικότητας, υπήρξε βελτίωση στην επιθυμία του συνεργάτη – συμμαθητή να ασχοληθεί ουσιαστικά και με ενδιαφέρον για τον τρόπο, ανακάλυψης – διδασκαλίας. Το ίδιο όμως, παρατήρησαν και οι ίδιοι για το εαυτό τους. Ουσιαστικά, η μάθηση μετατράπηκε από την «ανακάλυψη», σε μια εν γένει εμπειρία του μαθητή.

Για την επαλήθευση της αποτελεσματικότητα του εγχειρήματος, η εργασία παρουσιάστηκε και σε ένα άλλο τμήμα της Γ' Τάξης του σχολείου. Προέκυψαν τα ίδια αποτελέσματα που οδήγησαν στα ίδια συμπεράσματα.

Συμπεράσματα

Οι μαθητές με την βοήθεια του φύλλου εργασίας, του διαδραστικού πίνακα που χρησιμοποιήθηκε ως διεπαφή μεταξύ των μαθητών και του λογισμικού Geogebra, μπόρεσαν να απαντήσουν και να κατανοήσουν τα ερωτήματα που τους τέθηκαν και στην συνέχεια να γενικεύσουν σε κανόνες και τύπους.

Ήταν εμφανής η μεγάλη ευκολία μέσω ενός λογισμικού, να οπτικοποιείται άμεσα η διασύνδεση μεταξύ δύο μεγεθών, μέσω της διαδραστικής αλληλεπίδρασης αιτίας και αιτιατού (χρόνος – απόσταση). Λόγω του ότι έχει θεωρηθεί ότι, ένας τρόπος υπέρβασης της δυσκολίας κατανόησης των αλγεβρικών συμβόλων και παραστάσεων, είναι η επίλυση προβλημάτων η οποία συνδέει τον αλγεβρικό συμβολισμό με πραγματικές καταστάσεις, στην εργασία αυτή συνδέθηκε ένα πρόβλημα της φυσικής σε ένα αλγεβρικό. Έτσι περιορίστηκε η αποστήθιση κανόνων και μεθόδων από τους μαθητές μας με το να κατανοήσουν τις έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν. Τα ψηφιακά εργαλεία για την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών, καθώς διαθέτουν ικανότητες επικοινωνίας με τον χρήστη, κατάφεραν να μετασχηματίσουν την διδακτική διαδικασία. Η διάδραση και δυναμικός χαρακτήρας της τεχνολογίας στην περίπτωση αυτή, άλλαξαν κατά το καλύτερο αυτά που η διδακτική μπορεί να προσφέρει στην μαθησιακή διαδικασία. Με την εφαρμογή αυτή, ο μαθητής μπαίνει στο ρόλο του επιστήμονα που κάνει εικασίες, υποθέσεις, πειράματα, διατυπώνει δικά του θεωρήματα και ενδεχομένως τα αναθεωρεί μέσα από την διάψευσή τους. Επιπρόσθετα, η διασύνδεση συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού με επίκεντρο την έννοια της μεταβλητής, προσφέρει ένα παραγωγικό πεδίο διασύνδεσης μεταξύ εννοιών της Άλγεβρας και της Φυσικής.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Κυνηγός, Χ. (2007). Το Μάθημα της Διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης τεχνολογίας για την διδακτική των μαθηματικών. Από την Έρευνα στην Σχολική Τάξη Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα Α.Ε.

Κυνηγός, Χ. & Δημαράκη, Ε. (επιμ.) (2002) Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα. Εκδ. Καστανιώτη, Αθήνα.

Ματσαγγούρας (1987). Ομαδοκεντρική διδασκαλία και μάθηση, Αθήνα 1987. Εκδόσεις Γρηγόρη.

Κουτσελίνη & Θεοφιλίδης 2002. Διερεύνηση και συνεργασία για μια αποτελεσματική διδασκαλία. Εκδόσεις Γρηγόρης.

Davis R., Maher C., Noddings N. (1990) Constructivist views on the teaching and learning of mathematics [JRME Monograph]. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldengerg, P. (1999). Principles, art and craft in curriculum design: The case of Connected Geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4Q191-224, Kluwer Academic Publishers.

Hoyles, C. (2001). From describing to designing mathematical activity: The next step in developing the social approach to research in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 46: 273-286.

Hoyles, C. & Noss, R. (1992). A pedagogy for mathematical microworlds. Educational Studies in Mathematics, Vol. 23, 31-57.

Nardi, B. (1996) (Ed.) Context and Consciousness: Activity Theory and Human-Computer Interaction. MIT Press.

diSessa, A., Hoyles, C. & Noss, R. (Eds.) (1995). Computers and Exploratory Learning. Berlin: Springer- Verlag.

Sutherland, R. & Balacheff, N. (1999). Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4, 1-26.

Abstract

Using a very familiar example of everyday life, the free fall of a ball from a high point, students of 3rd grade of Ampelakia's secondary school in Salamina, examined how the two variables of time and distance, change in dependence, with the use of computers. They observed the various phases of the fall, computed the data and represented them on a Cartesian coordinate system. Computers helped to increase the density of selected data and thus to achieve a better quality of plotted graph, revealing the curvature of the parabola that come up. Using the software to experiment with various values of the factors in equation (1), they stated views that where examined for their validity against the graph of the parabola.

$$y = a(x - b)^2 + c \qquad \textbf{(1)}$$

Keywords: Parabola.