Η συμβολή ενός λογισμικού DGS στη λύση προβλήματος

Ε. Νικολουδάκης[1], Μ. Σπάθης[2]

[1]Σχολικός Σύμβουλος των Μαθηματικών
emnikolou@gmail.com
[2]Μαθηματικός Π. Πειραματικό ΓΕΛ Αγ. Αναργύρων (M.Sc., M.Ed.)
mspathis@sch.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε μερικά παραδείγματα από το χώρο της Γεωμετρίας, εστιαζόμενοι στον τρόπο με τον οποίο μπορεί να συμβάλλει ένα λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας προκειμένου να βοηθήσει τους μαθητές να περάσουν από την tabula rasa κατάσταση που βρίσκονται κατά την εκκίνηση λύσης ενός προβλήματος σε μια κατάσταση ανάπτυξης και ελέγχου εικασιών, που τους οδηγούν στη λύση του προβλήματος καθώς και στο να ασχοληθούν όπου απαιτείται με την απόδειξη. Επιπλέον έγινε προσπάθεια ώστε σε κάθε παράδειγμα να δημιουργούνται ερευνητικές ανησυχίες στους μαθητές, δηλαδή ένα τουλάχιστον «ερευνητικό» ερώτημα, του οποίου οι πρώτες απαντήσεις μπορούν να δοθούν με τη βοήθεια των δυνατοτήτων του λογισμικού.

Λέξεις κλειδιά: ΤΠΕ, λύση προβλήματος

1. Εισαγωγή

Αυτό που αλλάζει με τη χρήση ενός λογισμικού, δεν είναι τα Μαθηματικά, αλλά ο τρόπος θέασής τους. Χρησιμοποιώντας, όμως, ένα λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας ενέχει πάντα ο κίνδυνος οι μαθητές να πειστούν για την ορθότητα μιας πρότασης από την ανατροφοδότηση που παίρνουν από τις αναπαραστάσεις που προκύπτουν από το λογισμικό σχετικά με την αλήθεια της πρότασης. Ως εκ τούτου θα πρέπει από την αρχή να ξεκαθαριστεί στους μαθητές ότι οι δυναμικές αναπαραστάσεις στη διεπιφάνεια του υπολογιστή δεν υποκαθιστούν την απόδειξη, αλλά αποτελούν ενδείξεις προς τα πού πρέπει να κινηθεί ο μαθητής κατά τη λύση ενός προβλήματος.

Πρέπει, επίσης, να σημειώσουμε τη σημαντικότητα της έννοιας του προβλήματος στη διαδικασία διδασκαλίας - μάθησης των μαθηματικών. Για παράδειγμα όπως αναφέρουν πολλοί ερευνητές, όπως οι Kilpatrick (1987) και Silver (1994) «το πρόβλημα» είναι η καρδιά των μαθηματικών και προτείνουν ότι η ενσωμάτωση και η επίλυση προβλήματος μπορεί να ασκήσουν θετική επίδραση στη σκέψη των παιδιών. Σύμφωνα δε με το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991) η επίλυσή του προβλήματος για τη διδασκαλία των μαθηματικών θα πρέπει να είναι από τους κύριους άξονες όσον αφορά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Επίσης ο George Polya, ο πιο γνωστός μαθηματικός που έχει ασχοληθεί με τον τομέα της των μαθηματικών ως διαδικασία επίλυσης προβλήματος θεωρεί την επίλυση προβλήματος ως την πλέον σημαντική ικανότητα που πρέπει να διακρίνει τους ανθρώπους, αφού στη ζωή τους βρίσκονται διαρκώς αντιμέτωποι με προβλήματα, τα οποία καλούνται να επιλύσουν.

2. Λύση προβλήματος και ΤΠΕ

2.1 Η επίλυση προβλήματος σύμφωνα με τον George Polya

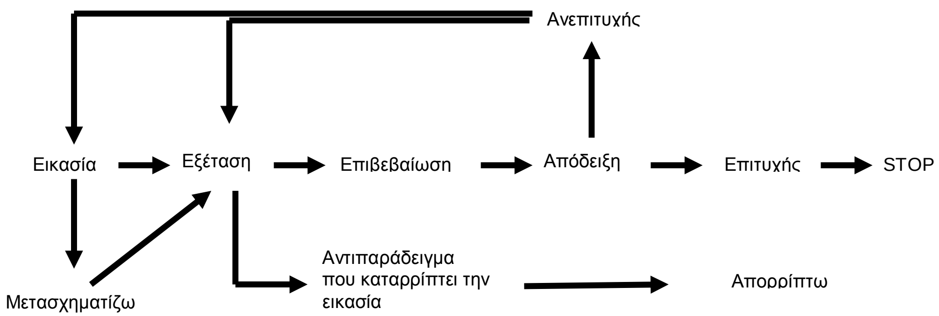
Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω ο George Polya θεωρεί την επίλυση προβλήματος ως την πλέον σημαντική ικανότητα που πρέπει να διακρίνει τους ανθρώπους, αφού στη ζωή τους βρίσκονται διαρκώς αντιμέτωποι με προβλήματα, τα οποία καλούνται να επιλύσουν. Ωστόσο πρέπει να τονιστεί ότι πολλές φορές η επίλυση των προβλημάτων απαιτεί απάντηση σε λίγο χρόνο και γρήγορη λήψη αποφάσεων βάσει της λύσης του προβλήματος.

Στο βιβλίο του «How to solve it» ο George Polya διακρίνει τέσσερα στάδια ιεραρχικά, δηλ. διατεταγμένα γραμμικά, που ακολουθούν οι λύτες προβλημάτων για την επιτυχή λύση ενός προβλήματος. Το πρώτο στάδιο, που σύμφωνα με τον συγγραφέα είναι βασικό, αφορά στην κατανόηση του προβλήματος, καθώς κάποιος δεν είναι δυνατό να απαντήσει σε κάτι, π.χ. σε ένα ερώτημα που δεν το έχει κατανοήσει. Ιδιαίτερα κρίσιμο θεωρείται η επινόηση ενός σχεδίου λύσης, που αποτελεί το δεύτερο στάδιο και καθορίζει τις απόπειρες λύσης του προβλήματος. Προφανώς η σύλληψη ενός σχεδίου κατά το μάλλον ή ήττον στην πλειονότητα των περιπτώσεων ενδέχεται να είναι μια χρονοβόρα διαδικασία. Δεδομένου δε ότι καθορίζει τις απόπειρες λύσης του προβλήματος θα χρειαστεί οι λύτες, εν προκειμένω οι μαθητές λύτες, να επιχειρήσουν αρκετές αποτυχημένες προσπάθειες μέχρις ότου να καταλήξουν σε μια επιτυχή επίλυση του προβλήματος. Η προσπάθεια εφαρμογής του σχεδίου λύσης, μέσω της στρατηγικής που ορίστηκε στο δεύτερο στάδιο, αποτελεί το τρίτο στάδιο, που θεωρείται πιο εύκολο από τα προηγούμενα. Ωστόσο, ο μαθητής χρειάζεται να επιμείνει ώστε να εφαρμόσει σωστά τη στρατηγική του. Το τελευταίο στάδιο αναφέρεται στην ανασκόπηση της λύσης, δηλ. ο μαθητής πρέπει να εξετάσει πάλι τη λύση που εφάρμοσε και το αποτέλεσμα, ώστε να βεβαιωθεί για την ορθότητα της λύσης που κατέληξε. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι αυτό το στάδιο εμπεριέχει τη μεταγνώση, που αν και πολύ σημαντική στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος, όμως, το στάδιο αυτό συχνά παραλείπεται, τόσο από τους διδάσκοντες όσο και από τους μαθητές.

2.2 Ο ρόλος του υπολογιστή στην επίλυση προβλήματος

Στο πρώτο στάδιο η οπτικοποίηση του προβλήματος μέσω υπολογιστή αποτελεί σημαντικό παράγοντα δεδομένου ότι η αναπαράσταση στη διεπιφάνεια του υπολογιστή είναι δυναμική αντί ενός στατικού σχήματος. Ιδιαίτερα, όμως, σημαντική είναι η βοήθεια του υπολογιστή στο δεύτερο στάδιο, δηλ. στη σύλληψη, στην επινόηση ενός σχεδίου λύσης. Αυτό συμβαίνει, διότι το δυναμικό σχέδιο στη διεπιφάνεια του υπολογιστή, βοηθά το μαθητή στην ανάπτυξη εικασιών, στην εξέτασή τους και στην αποδοχή ή απόρριψή τους μέσα από επαναλαμβανόμενους κύκλους πειραματισμών πάνω στην εικασία (σχήμα-1).

Σχήμα 1: *Κύκλος των πειραματισμών μέχρι το στάδιο της λύσης*



Στο τρίτο αλλά και στο τέταρτο και τελευταίο στάδιο, σύμφωνα με τον Polya, ο ρόλος του λογισμικού εξακολουθεί να είναι σημαντικός, γιατί παρέχει στο μαθητή την ευκαιρία μετατροπών των δεδομένων και εκ νέου διερεύνηση του νέου προβλήματος, το οποίο αποτελεί μπορεί να αποτελεί γενίκευση του αρχικού.

2.3 Ο ρόλος του συρσίματος (dragging) στην επίλυση προβλήματος

Είναι ευρέως γνωστό ότι οι δυνατότητες που προκύπτουν από τα εργαλεία ενός λογισμικού είναι πολλές. Δεν θα απαριθμήσουμε τις ήδη πολυσυζητημένες διευκολύνσεις που παρέχονται μέσω του υπολογιστή και των ΤΠΕ. Θα περιοριστούμε μόνο στο να αναφέρουμε ότι ένα DGS' όπως το Cabri εισάγει ένα ιδιαίτερο είδος εικόνων που μπορούν να συρθούν και να αλλάξουν κάτω από την επίδραση του συρσίματος (Mariotti, 2003). Από την προοπτική του Vygotsky, με το dragging δημιουργείται ένα «εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης». Ο Balacheff ισχυρίζεται στο Learning mathematics as modelling ότι αυτή η μετάβαση από την οθόνη του υπολογιστή στα μαθηματικά είναι μια διαδικασία modelling.

Για αυτό το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του συρσίματος, που εξυπηρετεί και τους στόχους μας, θα αναφέρουμε λίγα λόγια. Θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς ότι υπάρχουν «κάποια είδη» συρσίματος. Συγκεκριμένα οι Arzarello και Olivero, (Arzarello et al, 1998) μαζί με μια ομάδα άλλων ερευνητών, παρατηρώντας πώς οι σπουδαστές χρησιμοποιούν το ποντίκι λύνοντας ένα πρόβλημα σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας περιέγραψαν μια ποικιλία από "είδη συρσίματος" τα οποία περιγράφονται στις ακόλουθες μορφές:

1. Σύρσιμο περιπλάνησης (wandering dragging): κίνηση των βασικών σημείων στην οθόνη τυχαία, χωρίς κάποιο σχέδιο, προκειμένου να ανακαλυφθούν ενδιαφέρουσες μορφές ή κανονικότητες στα σχέδια.
2. Δεσμευμένο σύρσιμο (bound dragging): κίνηση ενός ημι- συρόμενου σημείου (semi- dragable) (σημείο που συνδέεται με ένα αντικείμενο, που μπορεί να κινηθεί αλλά μόνο στο αντικείμενο που ανήκει).
3. Καθοδηγημένο σύρσιμο (guided dragging): σύρσιμο των βασικών σημείων ενός σχεδίου προκειμένου να του δοθεί μια ιδιαίτερη μορφή.
4. Σύρσιμο εικονικού γεωμετρικού τόπου (dummy locus dragging): κίνηση ενός βασικού σημείου έτσι ώστε το σχέδιο να διατηρεί μια αποκαλυφθείσα ιδιότητα. Το κινούμενο σημείο ακολουθεί μια πορεία, οι χρήστες δεν την αντιλαμβάνονται, ο γεωμετρικός τόπος δεν είναι ορατός και «δεν μιλά» στους σπουδαστές, οι οποίοι δεν συνειδητοποιούν πάντα ότι σέρνουν κατά μήκος ενός γεωμετρικού τόπου.
5. Σύρσιμο γραμμών (line dragging): έλξη νέων σημείων κατά μήκος μιας γραμμής προκειμένου να διατηρηθεί η κανονικότητα του σχήματος.
6. Συνδεμένο σύρσιμο (linked dragging): σύνδεση της κίνησης ενός σημείου με την κίνηση ενός άλλου γεωμετρικού αντικειμένου.
7. Δοκιμή συρσίματος (dragging test): κίνηση των συρόμενων ή ημι-συρόμενων σημείων προκειμένου να φανεί εάν το σχέδιο διατηρεί ή όχι τις ιδιότητες με βάση των οποίων κατασκευάστηκε: αν περνά τη δοκιμή τότε κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις επιθυμητές γεωμετρικές ιδιότητες, διαφορετικά όχι.

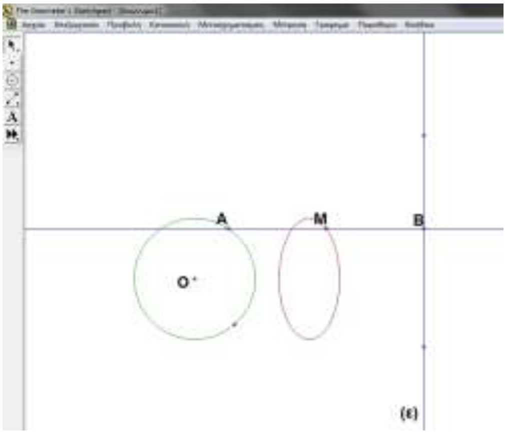
Τέλος συμφωνούμε με τον Καλαβάση (1997), που σημειώνει ότι οι απαιτήσεις ικανοτήτων σε τεχνολογικό περιβάλλον συγκλίνουν κατ' απόλυτο τρόπο με τις διδακτικές προτάσεις των θεωριών μάθησης και της επιστημολογίας όπως αυτές συντίθενται από τη Διδακτική των Μαθηματικών.

2.4 Τα παραδείγματα

Θα δώσουμε δύο παραδείγματα για να δείξουμε την παρεχόμενη βοήθεια του λογισμικού προς τη μαθητή. Το πρώτο παράδειγμα αφορά την εύρεση ενός γεωμετρικού τόπου. Η αξία του παραδείγματος δεν έγκειται στο ότι το λογισμικό θα εμφανίσει αυτόματα, με το πάτημα της εντολής locus, το γεωμετρικό τόπο, αλλά στα ερωτήματα που μπορούν να τεθούν στη συνέχεια. Το δεύτερο παράδειγμα αφορά ένα μάλλον γνωστό πρόβλημα, που απαντάται διαφοροποιημένο κάπως στη βιβλιογραφία και που επίσης η αξία του παραδείγματος έγκειται στα ερωτήματα που μπορούν να τεθούν στη συνέχεια του προβλήματος.

Παράδειγμα 1ο : Θεωρούμε κύκλο (Ο,ρ) και μια ευθεία (ε). Από τυχαίο σημείο Α του κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε κάθετη στην ευθεία (ε) που τέμνει την (ε) στο Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ευθ. τμήματος ΑΒ, όταν το Α κινείται στον κύκλο.

Ο γ.τ. είναι έλλειψη, όπως προκύπτει από την αναπαράσταση στη διεπιφάνεια του υπολογιστή είναι μία έλλειψη και ο μαθητής ωθούμενος από τη σιγουριά που του παρέχει το λογισμικό (σχήμα 2) θα προχωρήσει στην απόδειξη.

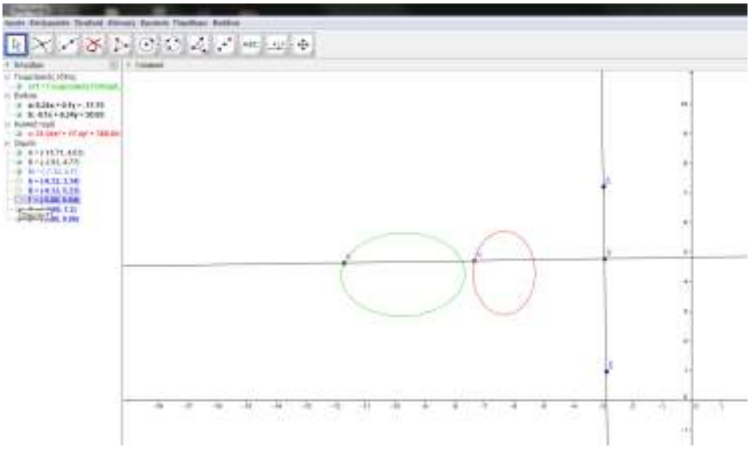


Σχήμα 2: *Η αναπαράσταση του γ.τ. από το λογισμικό*

Μερικά από τα ερωτήματα τώρα που μπορεί να τεθούν προς διερεύνηση είναι:

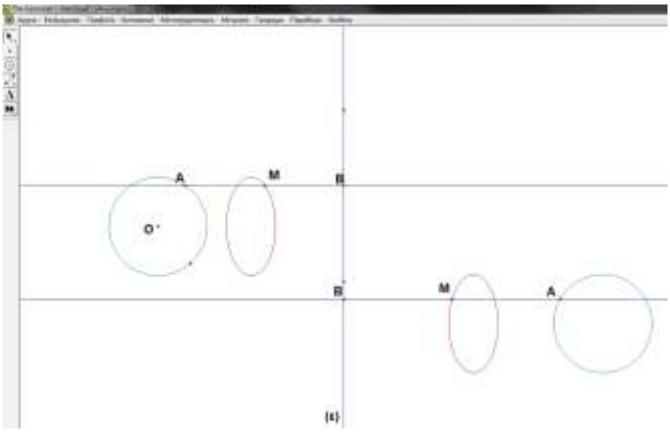
1. Ποιος είναι ο τόπος του Α αν το Μ κινείται σε έλλειψη παραμένοντας μέσον του ΑΒ;
2. Αν το σημείο Μ δεν ήταν μέσο θα είχαμε ανάλογα αποτελέσματα; Για παράδειγμα αν ΑΜ = 2ΜΒ θα είχαμε ανάλογα αποτελέσματα;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι ότι ο τόπος του Α, αν το Μ κινείται σε έλλειψη παραμένοντας μέσον του ΑΒ είναι μία άλλη έλλειψη και όχι κύκλος (σχήμα 3). Αυτό φαίνεται παράδοξο δεδομένου ότι σχέση που συνδέει τα Α, Μ , Β παραμένει και στον ένα τόπο και στον δεύτερο τόπο η ίδια.



Σχήμα 3: *Το αντίστροφο πρόβλημα*

Ωστόσο, ο γ.τ. που προκύπτει, αν θεωρήσουμε ότι το Μ κινείται στην συγκεκριμένη έλλειψη που πρόκυψε ως γ.τ. όταν το Α κινήθηκε στον κύκλο (Ο,ρ), τότε ο γ.τ. είναι κύκλος και μάλιστα ο κύκλος (Ο,ρ) (σχήμα 4).



Σχήμα 4: *Ειδική περίπτωση του αντίστροφου προβλήματος*

Από τα πιο πάνω αντιλαμβάνεται κανείς ότι η γενίκευση της περίπτωσης εύρεσης τόπου όταν το σημείο κινείται σε έλλειψη είναι έλλειψη. Αυτόματα, όμως, τώρα προβάλλει και ένα άλλο ερώτημα: σε ποια περίπτωση της γενίκευσης ο τόπος είναι κύκλος; Η απάντηση με το λογισμικό θεωρούμε ότι είναι μάλλον προφανής και δεν θα την αναπτύξουμε.

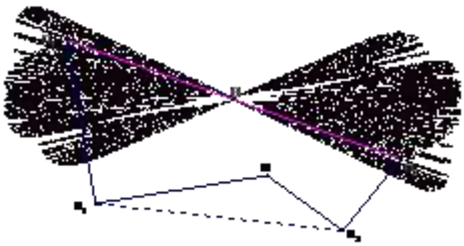
Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι ότι προκύπτουν ανάλογα αποτελέσματα και γενικεύεται ομοίως και η περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα 2ο: (Ανοιχτό πρόβλημα: Ο Θησαυρός των Πειρατών) «*Μια ομάδα από πειρατές αποφάσισαν να θάψουν το θησαυρό τους σε ένα νησί, με τον εξής τρόπο: Κατά μήκος της ακτής βρήκαν δύο μεγάλους βράχους που απείχαν περίπου 100 μέτρα. Κάπου μεταξύ των βράχων, περίπου 80 μέτρα από την ακτή προς το εσωτερικό του νησιού ήταν ένας μεγάλος φοίνικας. Σε καθέναν από τους δύο βράχους κάθισε ένας πειρατής έτσι ώστε να βλέπει το φοίνικα. Μετά οι πειρατές που ήταν στους βράχους έκαναν στροφή 90 μοιρών και περπάτησαν μια απόσταση ίση με την απόσταση που απείχε ο κάθε βράχος από το δέντρο. Κανένας από τους πειρατές δε βράχηκε. Με αυτούς τους πειρατές να στέκονται εκεί που σταμάτησαν, οι άλλοι πειρατές έθαψαν το θησαυρό τους στη μέση της απόστασής τους.*
Μετά από πολλά χρόνια επέστρεψαν να πάρουν το θησαυρό, βρήκαν τους βράχους, αλλά ο φοίνικας δεν υπήρχε. Τα έχασαν και δεν ήξεραν τι να κάνουν, μέχρι που ο μικρός καμαρότος που ήξερε λίγη Γεωμετρία υπολόγισε που πρέπει να είναι θαμμένος ο θησαυρός. Πράγματι έσκαψαν και τον βρήκαν. Πώς το υπολόγισε;»

Στα τόσα χρόνια κυκλοφορίας του, το πρόβλημα αυτό έχει καταστεί πλέον κλασικό. Το παραθέτουμε, όμως, διότι εκτιμούμε ότι παρουσιάζει σημαντικό ενδιαφέρον, από πλευράς επιλογών λύσεων και προσφέρεται για να διδαχτεί και στις τρεις βαθμίδες του Λυκείου, με διαφορετική κάθε φορά αντιμετώπιση, προφανώς. Ας προσπαθήσουμε να δούμε ποια είναι η πρώτη εικόνα που παρουσιάζεται στο μυαλό των μαθητών, μετά την ανάγνωση του προβλήματος. Από την εκφώνηση του προβλήματος, θέλοντας ο μαθητής να σχεδιάσει ένα σχήμα της κατάστασης που αντιμετωπίζει, εκτιμούμε ότι δεν μπορεί να καταλήξει σε άλλο από το ακόλουθο:

Σχήμα 5: *Η εικόνα του προβλήματος που δημιουργείται στο μαθητή*

Σχεδιάζοντας τα αντίστοιχα δεδομένα στο λογισμικό, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι θέσεις $Π_1$ και $Π_2$ είναι θυγατρικές της θέσης Φ και της στροφής που ορίζουμε να κάνουν τα τμήματα $Β_1Π_1$ και $Β_2Π_2$. Άρα μπορούμε να ζητήσουμε από το πρόγραμμα να κάνει σχεδίαση ίχνους του τμήματος $Π_1Π_2$, αφού προηγουμένως έχουμε ορίσει το σημείο Θ ως μέσο του. Σύρουμε λοιπόν το Φ σε διάφορες θέσεις και τα αποτελέσματα είναι άμεσα στην οθόνη μας (σχήμα 6).



Σχήμα 6: *Η εικόνα από τις τυχαίες θέσεις του φοίνικα*

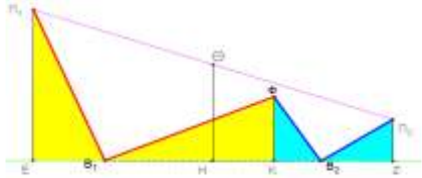
Εδώ ακριβώς εκτιμούμε ότι έχουμε την πρώτη ουσιαστικότατη συμβολή και βοήθεια του λογισμικού προς το μαθητή. Από ένα πρόβλημα που ουσιαστικά ήτανε tabula rasa, έχει κανείς την πρώτη ένδειξη για να ξεκινήσει. Έχουμε ισχυρότατες ενδείξεις ότι το σημείο Θ παραμένει σταθερό.

Το πώς θα κινηθεί ο μαθητής στη συνέχεια εξαρτάται από την τάξη στην οποία δίνουμε αυτό το πρόβλημα, αλλά και από ποιες επιλογές θα κάνει με τη βοήθεια του λογισμικού. Κάποιες από αυτές θα μπορούσαν να είναι οι ακόλουθες:

- «Οριακές» θέσεις που θα μπορούσε να πάρει ο φοίνικας
- Μέτρηση των αποστάσεων $ΘB_1$ και $ΘB_2$.
- Υπολογισμός των γωνιών $B_2B_1Θ$ και $ΘB_2B_1$
- Πιθανόν, κλίση ευθειών που ορίζονται από τα παραπάνω σημεία (αν το πρόβλημα δοθεί στη Β΄ Λυκείου).
- Χρήση συστήματος συντεταγμένων με οριζόντιο άξονα την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία B_1, B_2 κ.α.

Κάθε μια από τις παραπάνω σκέψεις μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης και επίλυσης της άσκησης.

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχουν προταθεί αρκετές λύσεις στη βιβλιογραφία και στο διαδίκτυο. Μπορούμε να αναφέρουμε ενδεικτικά ότι στο περιοδικό «Τα Μαθηματικά Στο Ενιαίο Λύκειο», τεύχος 5, Σεπτέμβριος 1999 έχουν προταθεί από τους Γεωργίου, Δ., Φωτόπουλο, Κ., επτά (7) λύσεις. Από όλες τις λύσεις που έχουν δημοσιευτεί γενικά, δημοφιλέστερη φαίνεται να είναι μια λύση, με ύλη Α Λυκείου, που σχηματικά περιγράφεται παρακάτω (σχήμα 7)

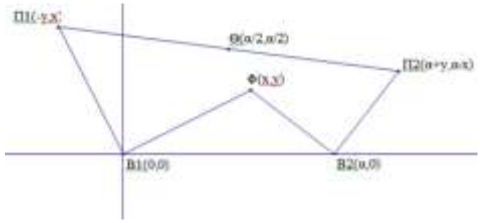


Σχήμα 7: *Ενδεικτική λύση του προβλήματος*

Δεν είναι στόχος της παρούσης εργασίας να επεκταθούμε στις λύσεις του προβλήματος , παρ' όλα αυτά μπήκαμε στον πειρασμό να παρουσιάσουμε σε αυτό το σημείο μια ακόμη λύση, η οποία δημοσιεύεται για πρώτη φορά και διεκδικεί τον τίτλο της συντομότερης λύσης. Η λύση αυτή αφορά σε μιγαδικούς και παρ' όλο που έχουν δημοσιευτεί λύσεις με μιγαδικούς, καμία δεν περιέχει στροφή μιγαδικών, που είναι και το κύριο σημείο της λύσης μας. Προφανώς δε, μπορεί να παρουσιαστεί και αντίστοιχη επιπλέον λύση με στροφή διανυσμάτων μέσω πινάκων στροφής, που επίσης δεν είναι δημοσιευμένη.

Έστω B_1, B_2 οι δύο βράχοι. Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με οριζόντιο άξονα αυτόν που ορίζεται από τους B_1, B_2 και κατακόρυφο τον κάθετο στον προηγούμενο άξονα στο σημείο B_1. Η απόσταση των δύο βράχων είναι σταθερή, έστω α, επομένως οι συντεταγμένες τους θα είναι $B_1(0,0)$ και $B_2(\alpha,0)$. Για τον φοίνικα θέτουμε Φ(x, y) αφού είναι άγνωστη η πραγματική του θέση. Έστω z_1 ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{B_1\Phi}$ και z_2 ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{B_2\Phi}$. Τότε θα είναι $z_1 = x + yi,\ z_2 = x - \alpha + yi$. Πολλαπλασιάζουμε τον z_1 με i και τον z_2 με $-i$. Θα οριστούν έτσι οι μιγαδικοί z_3, z_4, τις θέσεις των οποίων ονομάζουμε Π_1, Π_2 αντίστοιχα. Έχουμε λοιπόν ότι $z_3 = z_1 \cdot i = -y + xi$ και $z_4 - \alpha = z_2 \cdot (-i) = y - (x - \alpha)i \Leftrightarrow z_4 = y + \alpha - (x - \alpha)i$

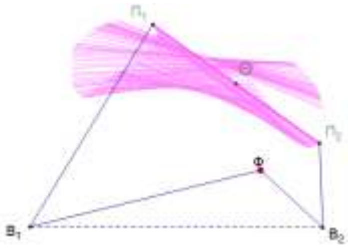
Άρα τα σημεία Π_1, Π_2 θα έχουν αντίστοιχα συντεταγμένες: $\Pi_1(-y, x)$ και $\Pi_2(\alpha + y, \alpha - x)$, επομένως το μέσον τους Θ, όπου είναι κρυμμένος ο θησαυρός, θα έχει $x_\Theta = \dfrac{-y + \alpha + y}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ και $y_\Theta = \dfrac{x + \alpha - x}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$, άρα είναι σταθερό, πάνω στη μεσοκάθετο του B_1B_2 σε απόσταση ίση με $\dfrac{\alpha}{2}$ (σχήμα 8).



Σχήμα 8: *Λύση με στροφή μιγαδικών*

Ένα ερώτημα που θα μπορούσε να τεθεί προς διερεύνηση είναι: *«Στρέψαμε δύο ευθύγραμμα τμήματα με κοινό άκρο κατά αντίθετη φορά και κατά γωνία* 90° *και διαπιστώσαμε ότι ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα με σταθερό μέσο, το οποίο καθορίζεται* *από την απόσταση των άλλων άκρων των ευθυγράμμων τμημάτων.* ***Άραγε αυτό ισχύει για οποιαδήποτε γωνία κι αν επιλέξουμε;»***

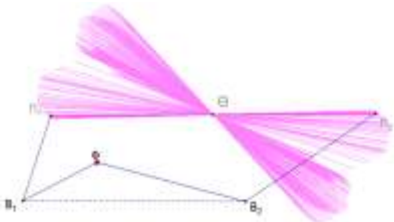
Η απάντηση είναι αρνητική και έρχεται άμεση από το λογισμικό (σχήμα 9)



Σχήμα 9: *Πρώτο διερευνητικό ερώτημα – αρνητική απάντηση*

Πιθανόν κάποιος να ήθελε να επεκτείνει τις ερευνητικές του ανησυχίες με το ακόλουθο ερώτημα: *«Υπάρχουν άραγε γωνίες που να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα;»*

Δοκιμάσαμε με γωνίες που έχουν ίσες απόλυτες τιμές, χωρίς καταφατική εξέλιξη. Μια ακόμη σχέση που μπορεί κανείς να διακρίνει στις δύο αρχικές στροφές είναι ότι οι απόλυτες τιμές τους έχουν άθροισμα 180°. Δοκιμάζουμε με κατάλληλα νούμερα στο λογισμικό κι έχουμε την επιβεβαίωση (σχήμα 10).



Σχήμα 10: *Η επιβεβαίωση στο δεύτερο διερευνητικό ερώτημα*

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη γενικευμένη απόδειξη με στροφές θ και $180^\circ - \theta$.

3. Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω παραδείγματα γίνεται φανερό ότι η συμβολή ενός λογισμικού DGS στη λύση προβλήματος αποτελεί για τους μαθητές σημαντικό παράγοντα παρακίνησης στη μάθηση των μαθηματικών. Επιπλέον αποτελεί παράγοντα που βοηθά τους μαθητές να μάθουν να ερευνούν και κατά συνέπεια να μάθουν να σκέπτονται, δηλ. αποτελεί εργαλείο που πραγματοποιεί το σκοπό μάθησης των μαθηματικών στο σύγχρονο σχολείο.

Αναφορές

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F. & Robutti, O. (1998). *Dragging in Cabri and Modalities of Transition from Conjectures to Proofs in Geometry*. Proceedings of PME 22: Psychology of Mathematics Education 22nd International Conference, 2 (pp.32-39).

Balacheff N. Learning mathematics as modelling http://mathforum.org/technology/papers/

Kilpatrick, L. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? *In A.H. Schoenfeld (Eds.),Cognitive Science and Mathematics Education*, (pp. 123-147). Hilladate, NJ: Erlbaum.

Mariotti M., A., (2003). Geometry: dynamic intuition and theory http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/mariotti.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Curriculum and evaluation standards for School mathematics, Reston*, VA NCTM.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14* (1), 19-28.

Τα Μαθηματικά στο Ενιαίο Λύκειο, Κωστόγιαννος, Αθήνα

Abstract

In this paper we present a few examples from the field of geometry, focusing on how a dynamic geometry software can contribute to help students go through the tabula rasa state when booting solution of a problem in a state of development and control speculation, which lead to the solution of the problem and to engage where appropriate with the proof. Additionally, extra effort was made to each case in order to create research concerns among the students, i.e. at least one "research" question, whose first responses can be given by means of software capabilities.

Key words ICT, Problem Solving